

PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables son multiplicaciones que cumplen reglas específicas y cuyo resultado se puede escribir mediante simple inspección, sin verificar la multiplicación. Cada producto notable corresponde a una fórmula de factorización. Para desarrollar los binomios se tiene en cuenta lo siguiente:

- **Número de Términos:** Debe haber uno más que el exponente.
- **Signos de cada término:** Si el binomio tiene signo positivo, entonces todos los términos serán positivos, si el binomio es negativo los signos se intercalan siendo el primero positivo.
- **Coefficiente de cada término:** Se determina por el triángulo de Pascal.

$n=0$	$(a+b)^0$									1					
$n=1$	$(a+b)^1$								1	1					
$n=2$	$(a+b)^2$								1	2	1				
$n=3$	$(a+b)^3$								1	3	3	1			
$n=4$	$(a+b)^4$								1	4	6	4	1		
$n=5$	$(a+b)^5$								1	5	10	10	5	1	
$n=6$	$(a+b)^6$								1	6	15	20	15	6	1

De esta forma se pueden determinar los coeficientes para cualquier exponente.

- **Exponente de cada término:** El del primer término disminuye de uno en uno a partir del exponente indicado; el del segundo término aumenta de uno en uno a partir del cero.

Suma o resta de dos cantidades al cuadrado $(a \pm b)^2$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Ejemplo: $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Suma o resta de dos cantidades al cubo $(a \pm b)^3$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Ejemplo: $(x+5)^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

$$(x-3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades $(a+b)(a-b)$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo: $(a+5)(a-5) = a^2 - 25$

$$(2a+3b)(2a-3b) = 4a^2 - 9b^2$$

Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$$

Ejemplo: $(x+3)(x-2) = x^2 + (3-2)x - (3 \cdot 2) = x^2 + x - 6$

$$(x^2+7)(x^2+3) = x^4 + (7+3)x^2 + (7 \cdot 3) = x^4 + 10x^2 + 21$$

Desarrollar los siguientes productos notables.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $(x+2)^2$	$x^2 + 4x + 4$	2) $(x+y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2$
3) $(x-4)^2$	$x^2 - 8x + 16$	4) $(x-3)^2$	$x^2 - 6x + 9$
5) $(3x-5)^2$	$9x^2 - 30x + 25$	6) $(a+2b)^2$	$a^2 + 4ab + 4b^2$
7) $(2a-1)^2$	$4a^2 - 4a + 1$	8) $(-a+2b)^2$	$a^2 - 4ab + 4b^2$
9) $(10x^3 - 9xy^5)^2$	$100x^6 - 180x^4y^5 + 81x^2y^{10}$	10) $(x^{a+1} - 3x^{a-2})^2$	$x^{2a+2} - 6x^{2a-1} + 9x^{2a-4}$
11) $(x+2)^3$	$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$	12) $(x-y)^3$	$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
13) $(2m+4n)^3$	$8m^3 + 48m^2n + 96mn^2 + 64n^3$	14) $(2x+2)^3$	$8x^3 + 24x^2 + 24x + 8$
15) $(-2+5x)^3$	$125x^3 - 150x^2 + 60x - 8$	16) $(x-7y)^3$	$x^3 - 21x^2y + 147xy^2 - 343y^3$
17) $(x-2y)^3$	$x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$	18) $(2x+3y)^3$	$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
19) $(4n+3)^3$	$64n^3 + 144n^2 + 108n + 27$	20) $(x+y)^4$	$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
21) $(b+1)(b-1)$	$b^2 - 1$	22) $(4+x)(4-x)$	$16 - x^2$
23) $(m-4)(m+4)$	$m^2 - 16$	24) $(3z-2)(3z+2)$	$9z^2 - 4$
25) $(5n-2m)(5n+2m)$	$25n^2 - 4m^2$	26) $(2x+1)(2x-1)$	$4x^2 - 1$
27) $(2x+3y)(2x-3y)$	$4x^2 - 9y^2$	28) $(y+3z)(y-3z)$	$y^2 - 9z^2$
29) $(x^3 + \sqrt{5}y^2)(x^3 - \sqrt{5}y^2)$	$x^6 - 5y^4$	30) $(x-2y)(x+2y)$	$x^2 - 4y^2$

31) $\left(y + \frac{5}{8}\right)\left(y - \frac{5}{8}\right)$	$y^2 - \frac{25}{64}$	32) $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$	$x^2 - \frac{9}{4}$
33) $\left(\frac{1}{5}y + \frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{5}y - \frac{3}{8}\right)$	$\frac{1}{25}y^2 - \frac{9}{64}$	34) $\left(n - \frac{5}{3}\right)\left(n - \frac{5}{3}\right)$	$n^2 - \frac{25}{9}$
35) $(a - 7)(a + 5)$	$a^2 - 2a - 35$	36) $(x - 9)(x + 4)$	$x^2 - 5x - 36$
37) $(n - 10)(n + 4)$	$n^2 - 6n - 40$	38) $(m - 2)(m + 15)$	$m^2 + 13m - 30$
39) $(x - 4)(x + 6)$	$x^2 + 2x - 24$	40) $(a + 11)(a + 3)$	$a^2 + 14a + 33$
41) $(n - 1)(n + 29)$	$n^2 + 28n - 29$	42) $(x - 3)(x - 6)$	$x^2 - 9x + 18$
43) $\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)$	$x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{15}{8}$	44) $\left(n - \frac{2}{3}\right)\left(n - \frac{5}{8}\right)$	$n^2 - \frac{31}{24}n + \frac{5}{12}$

FACTORIZACIÓN

Factorizar es escribir o representar una expresión algebraica como producto de sus factores.

Ejemplo: $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

Una expresión queda completamente factorizada cuando se representa como el producto de la mayor cantidad posible de factores de "primer grado" o "factores lineales". El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

Obtención de factores comunes.

Esta será la primera factorización que se aplique a cualquier expresión algebraica de acuerdo a lo siguiente:

1. Se observa si la expresión algebraica cuenta con un término común, en el caso de las letras se toman las comunes con menor exponente, en el caso de los coeficientes se obtiene el máximo común divisor, este término o factor común deberá ser diferente a uno.
2. Una vez encontrando el término común se busca el otro factor el cual es el resultado de la división de la expresión entre el término común.

Ejemplo: factorizar $6x^2y^3 - 32x^3y^3 + 48x^2y$

❖ Letras (términos comunes con menor exponente) : x^2y

❖ Números máximo común divisor: 2

$$6x^2y^3 - 32x^3y^3 + 48x^2y = 2x^2y(3y^2 - 16xy^2 + 24)$$

Factorización por agrupación o asociación

Esta factorización se puede aplicar siempre y cuando el número de términos de la expresión algebraica sea par. Se procede de la siguiente manera:

1. Se agrupan las parejas que tienen factor común
2. Cada pareja se factoriza por el método del factor común, de tal manera que los términos que resulten dentro de los paréntesis deberán ser iguales de lo contrario se tendrá que buscar otra combinación.
3. A los dos términos que quedan se les vuelve a sacar factor común.

Ejemplo: Factorizar

$$\begin{aligned}
 & ax + bx + ay + by \\
 & = x(a + b) + y(a + b) \\
 & \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\
 & \quad \quad \quad \text{Factor común} \quad \quad \quad \boxed{= (x + y)(a + b)}
 \end{aligned}$$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $a^2 + ab$	$a(a+b)$	2) $b + b^2$	$b(1+b)$
3) $x^2 + x$	$x(x+1)$	4) $3a^3 - a^2$	$a^2(3a-1)$
5) $x^3 - 4x^4$	$x^3(1-4x)$	6) $5m^2 + 15m^3$	$5m^2(1+3m)$
7) $2a^2x + 6ax^2$	$2ax(a+3x)$	8) $x^2y + x^2z$	$x^2(y+z)$
9) $35m^2n^3 - 70m^3$	$35m^2(n^3 - 2m)$	10) $24a^2xy^2 - 36x^2y^4$	$12xy^2(2a^2 - 3xy^2)$
11) $x - x^2 + x^3 - x^4$	$(1-x)(x+x^3)$	12) $ay + by + az + bz$	$(y+z)(a+b)$
13) $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$	$(x^2 + y^2)(a^2 - 3b)$	14) $rt + rv - st - sv$	$(r-s)(t+v)$
15) $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$	$(3m - 2n)(1 + x^4)$	16) $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$	$(3x^2 - 1)(x - 3a)$
17) $8x + 16xw - 12y - 24yw$	$(8x - 12y)(1 + 2w)$	18) $3x^3 - 9bx^2 - x + 3b$	$(3x^2 - 1)(x - 3b)$
19) $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$	$(x - y^2)(n^2 + 5a^2)$	20) $1 + a + 3ab + 3b$	$(a+1)(1+3b)$

Factorización de Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Ejemplo: Factorizar $x^2 + 12x + 35$

Se necesita encontrar dos números cuyo producto sea 35 y cuya suma sea igual a 12. Se puede realizar por inspección $x^2 + 12x + 35 = (x+7)(x+5)$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $a^2 - 13a + 40$	$(a - 8)(a - 5)$	2) $n^2 + 28n - 29$	$(n - 1)(n + 29)$	3) $n^2 - 6n - 40$	$(n - 10)(n + 4)$
4) $m^2 + 13m - 30$	$(m - 2)(m + 15)$	5) $a^2 + 7a - 60$	$(a - 5)(a + 12)$	6) $a^2 + 14a + 33$	$(a + 11)(a + 3)$
7) $x^2 - 5x - 36$	$(x - 9)(x + 4)$	8) $a^2 - 2a - 35$	$(a - 7)(a + 5)$	9) $x^2 + x - 2$	$(x - 1)(x + 2)$
10) $a^2 - 11a + 28$	$(a - 7)(a - 4)$	11) $x^2 + 2x - 24$	$(x - 4)(x + 6)$	12) $x^2 - 2x - 8$	$(x - 4)(x + 2)$

Factorización de Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Los trinomios de esta forma presentan como característica que el coeficiente del primer término es diferente de

1. Para factorizar estos trinomios existen varias formas: por inspección o de la siguiente forma:

Ejemplo: Factorizar $15x^2 - 23x + 4$

$$\frac{15(15x^2 - 23x + 4)}{15}$$

Se multiplica y se divide el trinomio por el coeficiente del primer término.

$$\frac{(15x)^2 - 23(15x) + 60}{15}$$

Se aplica la propiedad distributiva, dejando indicado el término del medio.

$$\frac{(15x - 20)(15x - 3)}{15}$$

Se factoriza como el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

$$\frac{5(3x - 4)3(5x - 1)}{5 \cdot 3}$$

Factor común a los dos binomios y descomponer el denominador en factores

primos

$$= (3x - 4)(5x - 1)$$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $4x^2 + 8x + 3$	$(2x + 1)(2x + 3)$	2) $2x^2 + 5x + 3$	$(x + 1)(2x + 3)$
3) $6x^2 + 5x - 4$	$(2x - 1)(3x + 4)$	4) $6x^2 + 7x + 2$	$(2x + 1)(3x + 2)$
5) $6x^2 + 17x + 12$	$(3x + 4)(2x + 3)$	6) $3y^2 + 8y + 5$	$(y + 1)(3y + 5)$

7) $13x^2 - 7x - 6$	$(x-1)(13x+6)$	8) $21m^2 + 11m - 2$	$(7m-1)(3m+2)$
9) $7x^2 - 15x + 2$	$(x-2)(7x-1)$	10) $2x^2 + 5x - 12$	$(2x-3)(x+4)$
11) $8x^2 - 14x + 3$	$(2x-3)(4x-1)$	12) $7p^2 + 13p - 2$	$(7p-1)(p+2)$

Factorización de Trinomio cuadrado perfecto:

1. Ordenar el Trinomio.
2. El 1^{ro} y 3^{er} término deben ser positivos y tener cuadrados perfectos.
3. El 2^{do} término debe ser el doble producto de las raíces de los extremos.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ejemplo: Factorizar $x^4 - 4x^2 + 4$

$$\sqrt{x^4} = x^2 \quad \sqrt{4} = 2 \quad \text{Se escribe con el signo de la mitad} \quad \boxed{(x^2 - 2)^2}$$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $g^2 + 2gh + h^2$	$(g+h)^2$	2) $225 - 30b + b^2$	$(15-b)^2$
3) $x^2 + 2xy + y^2$	$(x+y)^2$	4) $a^2 - 2a + 1$	$(a-1)^2$
5) $m^2 - 6m + 9$	$(m-3)^2$	6) $9x^2 - 12xy + 4y^2$	$(3x-2y)^2$
7) $4a^2 + 4ab + b^2$	$(2a+b)^2$	8) $36n^2 + 84pn + 49p^2$	$(6n+7p)^2$
9) $x^2 - 10x + 25$	$(x-5)^2$	10) $49x^2 - 14x + 1$	$(7x-1)^2$
11) $4x^2 - 4x + 1$	$(2x-1)^2$	12) $25m^2 - 70mn + 49n^2$	$(5m-7n)^2$

Factorización de Diferencia de cuadrados $x^2 - y^2$:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

Ejemplo: Factorizar $x^2 - 36$

$$\sqrt{x^2} = x \quad \sqrt{36} = 6 \quad \text{Se escriben dos paréntesis con signos contrarios} \quad \boxed{(x+6)(x-6)}$$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $x^2 - 25$	$(x+5)(x-5)$	2) $y^2 - m^2$	$(y+m)(y-m)$
3) $4x^2 - 1$	$(2x+1)(2x-1)$	4) $9x^2 - 16$	$(3x+4)(3x-4)$
5) $16a^2 - 100$	$(4a+10)(4a-10)$	6) $36m^2n^2 - 25$	$(6mn+5)(6mn-5)$
7) $169m^2 - 196n^2$	$(13m+14n)(13m-14n)$	8) $9p^2 - 64$	$(3p+8)(3p-8)$
9) $p^2 - 3$	$(p+\sqrt{3})(p-\sqrt{3})$	10) $8y^2 - 18$	$(2\sqrt{2}y+3\sqrt{2})(2\sqrt{2}y-3\sqrt{2})$

Factorización de Suma o Diferencia de cubos $x^3 - y^3$, $x^3 + y^3$

Diferencia de cubos $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

Se extrae la raíz cúbica de ambos términos, luego se escriben dos paréntesis, el primero con la resta de las raíces y el segundo en la forma siguiente: la primera raíz al cuadrado más el producto de las dos raíces más el cuadrado de la segunda raíz, como lo indica el ejemplo

Ejemplo: Factorizar $x^3 - 2^3$

$$x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

Suma de cubos $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

Igual que la diferencia, sólo se cambian algunos signos

Ejemplo: Factorizar $x^3 + 2^3$

$$x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $x^3 - 64$	$(x-4)(x^2 + 4x + 16)$	2) $x^3 - y^3$	$(x-y)(x^2 + xy + y^2)$
3) $8a^3b^3 + 27$	$(2ab+3)(4a^2b^2 - 6ab + 9)$	4) $27m^3 + n^3$	$(3m+n)(9m^2 - 3mn + n^2)$
5) $64a^3 - 125$	$(4a-5)(16a^2 + 20a + 25)$	6) $m^3n^3 + 125$	$(mn+5)(m^2n^2 - 5mn + 25)$

7) $1728m^3 - 216$	$(12m - 6)(144m^2 - 72m + 36)$	8) $x^6 - y^6$	$(x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$
9) $p^3 - 9$	$(p - \sqrt[3]{9})(p^2 + \sqrt[3]{9}p + 3\sqrt[3]{3})$	10) $8y^3 + 216$	$(2y + 6)(4y^2 - 12y + 36)$

Ajustar el trinomio cuadrado perfecto:

Ejemplo: Ajustar el trinomio $x^2 - 2x - 8$ a TCP

$$x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 8$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 8 = (x - 1)^2 - 9$$

Ajustar las expresiones algebraicas a trinomio cuadrado perfecto y factorizar

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $x^2 + 6x - 5$	$(x + 3)^2 - 14$	2) $a^2 - 66a + 1080$	$(a - 33)^2 - 9$
3) $x^2 + 54x + 648$	$(x + 27)^2 - 81$	4) $m^2 - 8m - 3$	$(m - 4)^2 - 19$
5) $n^2 + 16n + 50$	$(n + 8)^2 - 14$	6) $m^2 - 8m + 14$	$(x + 4)^2 - 2$
7) $x^2 + 12x + 30$	$(x + 6)^2 - 6$	8) $p^2 - 6p - 2$	$(p - 3)^2 - 11$
9) $y^2 - 4y + 6$	$(x - 2)^2 + 2$	10) $y^2 - 18y + 74$	$(y - 9)^2 - 7$
11) $x^2 - 20x + 80$	$(x - 10)^2 - 20$	12) $x^2 + 6x - 1$	$(x + 3)^2 - 10$
13) $y^2 - 18y + 3$	$(y - 9)^2 - 78$	14) $x^2 - 6x + 5$	$(x - 3)^2 - 4$
15) $x^2 - 8x - 2$	$(x + 4)^2 - 18$		

Factorizar las siguientes expresiones

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $96 - 48mn^2 + 144n^2$	$48(2 - mn^2 + 3n^2)$	2) $15y^3 + 20y^2 - 5y$	$5y(3y^2 + 4y - 1)$
3) $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$	$(2x - 5y)(a^2 - 3b)$	4) $x^8 - 10x^4 + 16$	$(x^4 - 8)(x^4 - 2)$
5) $7p^6 - 33p^3 - 10$	$(7p^3 + 2)(p^3 - 5)$	6) $4x^2 + 12xy^2 + 9y^4$	$(2x + 3y^2)^2$

7) $25x^2y^4 - 121$	$(5xy^2 + 11)(5xy^2 - 11)$	8) $a^3b^3 + 343$	$(ab + 7)(a^2b^2 + 7ab + 49)$
9) $\frac{a^2b^2}{x} + \frac{a^3b^3}{x^2} - \frac{a^2b^2}{x^3}$	$\frac{a^2b^2}{x} \left(1 + \frac{ab}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$	10) $\frac{p^2q^2}{2ab} + \frac{pq}{2ac} - \frac{p^3q^3}{2abc}$	$\frac{pq}{2a} \left(\frac{pq}{b} + \frac{1}{c} - \frac{p^2q^2}{bc} \right)$
11) $10u^8 + 29u^4 + 10$	$(5u^4 + 2)(2u^4 + 5)$	12) $t^3 - 729s^3$	$(t - 9s)(t^2 + 9ts + 81s^2)$
13) $x^6 - 15x^3y + 26y^2$	$(x^3 - 13y)(x^3 - 2y)$	14) $f^4 - f^2 - 56$	$(f^2 - 8)(f^2 + 7)$
15) $x^{3/2} - 5x^4 + x^{1/2}$	$x^{1/2}(x - 5x^{7/2} + 1)$	16) $6m^2 - mn - 2n^2$	$(3m - 2n)(2m + n)$
17) $\frac{144}{81}x^2 - \frac{25}{64}a^2$	$\left(\frac{1}{5}y^2 + \frac{3}{8}x^2 \right) \left(\frac{1}{5}y^2 - \frac{3}{8}x^2 \right)$	18) $a^{2n}b^{4n} - \frac{1}{25}$	$\left(a^n b^{2n} + \frac{1}{5} \right) \left(a^n b^{2n} - \frac{1}{5} \right)$
19) $12 - 7x - 10x^2$	$(5x - 4)(-2x - 3)$	20) $3x^5 - 15x^4 + 18x^3$	$3x^3(x^2 - 5x + 6)$
21) $25w^{4x+10} - 20w^{2x+5} + 4$	$(5w^{2x+5} + 2)^2$	22) $50m^2 + 40m - 24$	$(5m + 6)(10m - 4)$
23) $27a^3 + 8p^3$	$(3a + 2p)(9a^2 - 6ap + 4p^2)$	24) $3x - 6x^2 + 9x^3$	$3x(1 - 2x + 3x^2)$
25) $16k^4l^2 - 40k^8l^4 + 25k^{12}l^6$	$(4k^2l - 5k^6l^3)^2$	26) $6ax + 3a + 1 + 2x$	$(3a + 1)(2x + 1)$
27) $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$	$(4a^2 - 3m)(ax - b)$	28) $512z^3 - 27$	$(8z - 3)(64z^2 + 24z + 9)$
29) $16v^2t^2 - 16vtab + 4a^2b^2$	$(4vt - 2ab)^2$	30) $x^7 - 5x^{-5} + x^3$	$x^{-5}(x^{12} - 5 + x^8)$
31) $\frac{3a}{b} + \frac{12a}{b^2} - \frac{21a}{b^3}$	$\frac{3a}{b} \left(1 + \frac{4}{b} - \frac{7}{b^2} \right)$	32) $\frac{1}{25} + \frac{25x^4}{36} - \frac{x^2}{3}$	$\left(\frac{5x^2}{6} - \frac{1}{5} \right)^2$
33) $9x^4 + 6x^2y^3 + y^6$	$(3x^2 + y^3)^2$	34) $20q^2 + 44q - 15$	$(10q - 3)(2q + 5)$
35) $y^3 + 125x^3$	$(y + 5x)(y^2 + 5xy + 25x^2)$	36) $a^2b^8 - c^2$	$(ab^4 + c)(ab^4 - c)$
37) $289x^2 + 68xyz + 4y^2z^2$	$(17x + 2yz)^2$	38) $-x^2 + 2x - 1$	$(x - 1)^2$
39) $\frac{1}{25}y^4 - \frac{9}{64}x^4$	$\left(\frac{1}{5}y^2 + \frac{3}{8}x^2 \right) \left(\frac{1}{5}y^2 - \frac{3}{8}x^2 \right)$	40) $\frac{m^{20}}{20} + \frac{m^{10}}{10} - \frac{m^5}{5}$	$\frac{m^5}{5} \left(\frac{m^{15}}{4} + \frac{m^5}{2} - 1 \right)$
41) $x^{16} - y^{16}$	$(x^8 + y^{58})(x^8 - y^{58})$	42) $49x^2y^6z^{10} - a^{12}$	$(7xy^3z^5 + a^6)(7xy^3z^5 - a^6)$
43) $10x^3y^2 - 2x^2y + 4y^4x$	$2xy(5x^2y - x + 2y^3)$	44) $x + x^2 - xy^2 - y^2$	$(x - y^2)(1 + x)$

45) $x^6 - 5y^4$	$(x^3 + \sqrt{5}y^2)(x^3 - \sqrt{5}y^2)$	46) $4x^2 - 4x + 1$	$(2x - 1)^2$
47) $121x^2 - 144k^2$	$(11x + 12k)(11x - 12k)$	48) $9x^2 - 6x + 1$	$(3x - 1)^2$
49) $xy^{-1} + x^{-2}y + xy^2$	$x^{-2}y^{-1}(x^3 + y^2 + x^3y^3)$	50) $6x^2 - 5x - 6$	$(2x - 3)(3x + 2)$
51) $2x^2y + 2xz^2 - y^2z^2 - xy^3$	$(2x - y^2)(xy + 2z^2)$	52) $30p^2 + 17pq - 21q^2$	$(5p - 3q)(6p + 7q)$
53) $1 + 49x^4y^2 + 14x^2y$	$(1 + 7x^2y)^2$	54) $5t^6 + 4t^3 - 12$	$(5t^3 - 6)(t^3 + 2)$
55) $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$	$(3a - b^2)(1 - 2x)$	56) $5 + 7x^4 - 6x^8$	$(3x^4 - 5)(-2x^4 - 1)$
57) $4x^{2n} - \frac{1}{9}$	$\left(2x^n + \frac{1}{3}\right)\left(2x^n - \frac{1}{3}\right)$	58) $49a^{10n} - \frac{b^{12x}}{81}$	$\left(7a^{5n} + \frac{b^{6x}}{9}\right)\left(7a^{5n} - \frac{b^{6x}}{9}\right)$
59) $(a + x)^2 - (x + 2)^2$	$(a + 2x + 2)(a - 2)$	60) $9 - 12x + 4x^2$	$(2x - 3)^2$
61) $36m^{2x} + 48m^x n^y + 16n^{2y}$	$(6m^x + 4n^y)^2$	62) $20f^2 - 9f - 20$	$(4f - 5)(5f + 4)$
63) $12m^2 - 13m - 35$	$(4m + 5)(3m - 7)$	64) $15m^2 + 16m - 15$	$(5m - 3)(3m + 5)$
65) $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$	$(3ab - 2)(x^2 + y^2)$	66) $9r^2 + 37r + 4$	$(9r + 1)(r + 4)$
67) $a^2 + ab + ax + bx$	$(a + x)(a + b)$	68) $30x^2 - 47x + 14$	$(6x - 7)(5x - 2)$
69) $ax - 2bx - 2ay + 4by$	$(x - 2y)(a - 2b)$	70) $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$	$(a^2 + 1)(4a - 1)$
71) $a^2 - 10a + 24$	$(a - 6)(a - 4)$	72) $x^2 - 3x - 28$	$(x - 7)(x + 4)$
73) $3 - x^2 + 2abx^2 - 6ab$	$(2ab - 1)(x^2 - 3)$	74) $16x^2 - 46x + 15$	$(8x - 3)(2x - 5)$
75) $4x^{10} - 16y^6$	$(2x^5 + 4y^3)(2x^5 - 4y^3)$	76) $25m^4 - 40m^2 + 16$	$(5m^2 - 4)^2$
77) $x^4 - 5xb - 50b^2$	$(x^2 - 10b)(x^2 + 5b)$	78) $x^6 - 7x^3 - 8$	$(x^3 - 8)(x^3 + 1)$
79) $6m - 9n + 21nx - 14mx$	$(2m - 3n)(3 - 7x)$	80) $a^2 + 2a - 63$	$(a - 7)(a + 9)$
81) $-10b^2 - 7b + 12$	$(-2b - 3)(5b - 4)$	82) $36x^2 - a^6b^4$	$(6x - a^3b^2)(6x + a^3b^2)$
83) $49x^4y^2 - 64w^{10}z^{14}$	$(7x^2y - 8w^5z^7)(7x^2y + 8w^5z^7)$	84) $4x^4 - 29x^2 + 25$	$(4x^2 - 25)(x^2 - 1)$
85) $x^6 + 64$	$(x^2 + 4)(x^4 + 4x^2 + 16)$	86) $12p^2 - 7p - 12$	$(3p - 4)(4p + 3)$

87) $2x^2 + 5x + 3$	$(x+1)(2x+3)$	88) $25m^6 - 9n^8$	$(5m^3 + 3n^4)(5m^3 - 3n^4)$
89) $p^{15} - 343t^6$	$(p^5 - 7t^2)(p^{10} + 7p^5t^2 + 49t^4)$	89) $15m^2 + m - 6$	$(5m - 3)(3m + 2)$
90) $15n^2 - mn - 2m^2$	$(5n - 2m)(3n + m)$	91) $16x^4 - 49y^6$	$(4x^2 + 7y^3)(4x^2 - 7y^3)$

En los siguientes ejercicios debe aplicar varios casos de factorización en cada ejercicio. Debe reducirse lo máximo posible.

Factorizar completamente las siguientes expresiones.

Ejercicio	Respuesta
1) $x^3 - 4x^2 + 4x$	$x(x-2)^2$
2) $x^3 - 4x^2 - 165x$	$x(x-15)(x+11)$
3) $25x^3 + 4x$	$x(25x^2 + 4)$
4) $(x+3)^2 - 1$	$(x+2)(x+4)$
5) $2x^4 - 8x^2$	$2x^2(x+2)(x-2)$
6) $(2+x)^{-\frac{2}{3}}x + (2+x)^{\frac{1}{3}}$	$2(x+1)(2+x)^{-\frac{2}{3}}$
7) $x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$	$x^{-\frac{3}{2}}(1+x)^2$
8) $x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$	$x^{\frac{1}{2}}(x-1)(x+1)$
9) $x^4 - 4$	$(x^2 + 2)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
10) $x^3 - 6x$	$x(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$
11) $x^4 - 64x$	$x(x-4)(x^2 + 4x + 16)$
12) $x^5y^2 - xy^6$	$xy^2(x^2 + y^2)(x+y)(x-y)$
13) $3x^{\frac{3}{2}} - 9x^{\frac{1}{2}} - 120x^{-\frac{1}{2}}$	$3x^{-\frac{1}{2}}(x-8)(x+5)$
14) $2x^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{4}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$	$-(3x-4)x^{\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$
15) $(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 2(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$	$(x^2 + 3)(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$

16) $x^8 - 3x^4 - 4$	$(x^4 + 1)(x^2 + 2)(x^2 - 2)$
17) $c^8 - d^8$	$(c^4 + d^4)(c^2 + d^2)(c + d)(c - d)$
18) $3a^3 + 24a^2b + 48ab^2$	$3a(a + 4b)^2$
19) $64(x + y)^3 - 27(x - y)^3$	$(x + 7y)(37x^2 + 14xy + 13y^2)$
20) $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$	$(4m^2 + 3n)(4m^2 - 3n)(m + n)(m - n)$
21) $x^{12} - y^{12}$	$(x^2 + y^2)(x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$
22) $x^5 - 40x^3 + 144x$	$x(x + 6)(x - 6)(x + 2)(x - 2)$
23) $x^4 + 8x^2 - 9$	$(x^2 + 9)(x + 1)(x - 1)$
24) $x^4 + 8x^3 - 9$	$(x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1)$
25) $x^6 - 7x^3 - 8$	$(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 1)(x^2 - x + 1)$
26) $x^6 - 25x^3 - 54$	$(x - 3)(x^2 + 3x + 9)(x^3 + 2)$