DESIGUALDADES (INECUACIONES)

Se llama inecuación a una desigualdad que contiene variables. Es similar a una ecuación cambiando el igual por un $<, >, \leq o \geq$. Ejemplo:

$$3x+2\leq 5 \qquad\qquad x^2-2x\geq 10 \qquad\qquad x<5$$

El objetivo es determinar el valor o los valores de la incógnita (Variable) x para los cuales se cumple la desigualdad. Por lo general una desigualdad tiene infinitas soluciones que forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta real.

Propiedades de las desigualdades

Propiedad de tricotomía: Sí a y b son dos reales cualesquiera, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes expresiones: $a<b$, o $a=b$, o $a>b$

Propiedad transitiva: Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$

Desigualdades lineales.

Son desigualdades lineales si cada término es constante o múltiplo de la variable.

Ejemplo: Resolver las siguientes desigualdades

a) $5x<7x+7$
b) $3\leq 5x-2<8$

a) $5x<7x+7$

$5x-7x<7x-7x+7$	Axioma de igualdad
$-2x<7$	Agrupación de términos semejantes
$\left(-\frac{1}{2}\right)-2x>\left(-\frac{1}{2}\right)7$	Axioma de igualdad
$x>-\frac{7}{2}$	Simplificando

El conjunto solución es el intervalo de todos los números mayores que $-\frac{7}{2}$ $\boxed{\left(-\frac{7}{2},\infty\right)}$

b) $3\leq 5x-2<8$

$3+2\leq 5x<8+2$	Axioma de igualdad
$5\leq 5x<10$	Agrupación de términos semejantes
$\frac{5}{5}\leq\frac{x}{5}<\frac{10}{5}$	Axioma de igualdad
$1\leq x<2$	Simplificando

El conjunto solución es el intervalo $\boxed{[1,2)}$

Desigualdades no lineales.

Si la variable tiene potencia diferente de uno, es necesario aplicar la factorización.

Ejemplo: Resolver las siguientes desigualdades

a) $x^2 - 6x - 16 \le 0$

b) $\dfrac{x+1}{x^2-9} \ge 0$

Propiedades de desigualdades con valores absolutos

Desigualdad	Forma equivalente
$\lvert x\rvert < c$	$-c < x < c$
$\lvert x\rvert \le c$	$-c \le x \le c$
$\lvert x\rvert > c$	$x < -c \qquad c < x$
$\lvert x\rvert \ge c$	$x \le -c \qquad c \le x$

Ejemplo: Resolver las siguientes desigualdades con valor absoluto.

a) $\lvert x-6\rvert \le 4$

b) $\left\lvert \dfrac{x}{2} + 3 \right\rvert \ge 5$

Resolver las siguientes desigualdades

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $2x-5>3$	$(4,\infty)$	2) $7-x \ge 5$	$(-\infty,2]$
3) $3x+11<5$	$(-\infty,-2)$	4) $5-3x \le -16$	$[7,\infty)$
5) $2x+1<0$	$(-\infty,-\tfrac{1}{2})$	6) $0<5-2x$	$(-\infty,\tfrac{5}{2})$
7) $3x+11 \le 6x+8$	$[1,\infty)$	8) $6-x \ge 2x+9$	$(-\infty,-1]$
9) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$	$\left(\frac{16}{3},\infty\right)$	10) $\frac{2}{5}x+1 < \frac{1}{5} - 2x$	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$
11) $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$	$(-\infty,-18)$	12) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \ge \frac{1}{6} + x$	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$
13) $4-3x \le -(1+8x)$	$(-\infty,-1]$	14) $2(7x-3) \le 12x+16$	$(-\infty,11]$
15) $2 \le x+5 < 4$	$[-3,-1)$	16) $5 \le 3x-4 \le 14$	$[3,6]$
17) $-1 < 2x-5 < 7$	$(2,6)$	18) $1 < 3x+4 \le 16$	$(-1,4]$
19) $-2 < 8-2x \le -1$	$(-\infty,5) \cup \left[\frac{9}{2},\infty\right)$	20) $-3 \le 3x+7 \le \tfrac{1}{2}$	$\left[-\frac{10}{3},-\frac{13}{6}\right]$
21) $\frac{1}{6} \le \frac{2x-13}{12} < \frac{2}{3}$	$\left[\frac{15}{2},\frac{21}{2}\right)$	22) $\frac{1}{2} \le \frac{4-3x}{5} \le -\frac{3}{2}$	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{23}{6},\infty\right)$
23) $(x+2)(x-3)<0$	$(-2,3)$	24) $(x-5)(x+4) \ge 0$	$(-\infty,-4] \cup [5,\infty)$

25) $x(2x+7)\geq 0$	$\left(-\infty,-\frac{7}{2}\right]\cup[0,\infty)$	26) $x(2-3x)\leq 0$	$(-\infty,0]\cup\left[\frac{2}{3},\infty\right)$
27) $x^2-3x-18\leq 0$	$[-3,6]$	28) $x^2+5x+6>0$	$(-\infty,-3)\cup(-2,\infty)$
29) $2x^2+x\geq 1$	$(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right)$	30) $x^2<x+2$	$(-1,2)$
31) $3x^2-3x<2x^2+4$	$(-1,4)$	32) $5x^2+3x\geq 3x^2+2$	$(-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right)$
33) $x^2>3(x+6)$	$(-\infty,-3)\cup(6,\infty)$	34) $x^2+2x>3$	$(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$
35) $x^2<4$	$(-2,2)$	36) $x^2\geq 9$	$(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$
37) $(x+2)(x-1)(x-3)\leq 0$	$(-\infty,-2]\cup[1,3)$	38) $x^3-4x>0$	$(-2,0)\cup(2,\infty)$
39) $16x\leq x^3$	$[-4,0]\cup[4,\infty)$	40) $\frac{x-3}{x+1}\geq 0$	$(-\infty,-1)\cup[3,\infty)$
41) $\frac{2x+6}{x-2}<0$	$(-3,2)$	42) $\frac{4x}{2x+3}>2$	$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$
43) $-2<\frac{x+1}{x-3}$	$\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)\cup(3,\infty)$	44) $\frac{2x+1}{x-5}\leq 3$	$(-\infty,5)\cup[16,\infty)$
45) $\frac{3+x}{3-x}\geq 1$	$[0,3)$	46) $\frac{4}{x}\leq x$	$[-2,0)\cup[2,\infty)$
47) $\frac{x}{x+1}>3x$	$(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{2}{3},0\right)$	48) $1+\frac{2}{x+1}\leq\frac{2}{x}$	$[-2,-1)\cup(0,1]$
49) $\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x}\geq 1$	$[-2,0)\cup(1,2]$	50) $\frac{6}{x-1}-\frac{6}{x}\geq 1$	$[-2,0)\cup(1,3]$
51) $\frac{x}{2}\geq\frac{5}{x+1}+4$	$[-2,-1)\cup[9,\infty)$	52) $\frac{x+2}{x+3}<\frac{x-1}{x-2}$	$\left(-3,-\frac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$
53) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\leq 0$	$(-\infty,-2)\cup\left[-\frac{3}{2},-1\right)$	54) $x^4>x^2$	$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
55) $x^5>x^2$	$(1,\infty)$	56) $\|x\|\leq 4$	$[-4,4]$
57) $\|3x\|<15$	$(-5,5)$	58) $\|2x\|<7$	$\left(-\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$
59) $\|2x\|>7$	$\left(-\infty,-\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2},\infty\right)$	60) $\|x+6\|<10$	$(-16,4)$
61) $\|x-5\|\leq 3$	$[2,8]$	62) $\|x+1\|\geq 1$	$(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$
63) $\|2x-3\|\leq 4$	$\left[-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$	64) $\|5x-2\|<6$	$\left(-\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$
65) $\left\|\frac{x-2}{3}\right\|<2$	$(-4,8)$	66) $\left\|\frac{x+1}{2}\right\|\geq 4$	$(-\infty,-9]\cup[7,\infty)$
67) $3-\|2x+4\|\leq 1$	$(-\infty,-3]\cup[-1,\infty)$	68) $8-\|2x-1\|\geq 6$	$\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$
69) $2\|x+2\|-5>4$	$\left(-\infty,-\frac{13}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\infty\right)$	70) $\|5-2x\|\leq 7$	$[-1,6]$

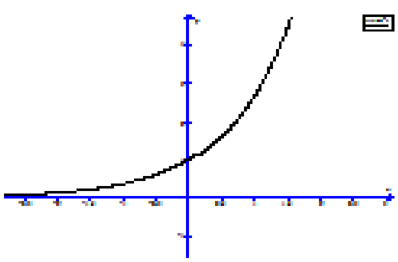
EXPONENCIACIÓN Y LOGARITMACIÓN

Se presentan dos funciones de gran importancia en la matemática, como son: la función exponencial y la función logarítmica.

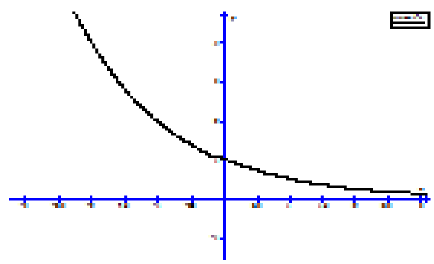
Función exponencial

Definición: Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama función exponencial de base a y exponente x.

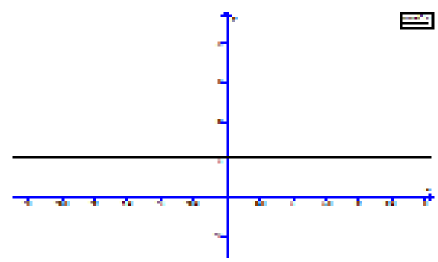
Cuando $a > 1$ .Es decir, cuando la base a es mayor que 1, la función exponencial es estrictamente creciente en su dominio. Cuando $0 < a < 1$ la función exponencial es estrictamente decreciente en su dominio. Cuando $a = 1$ la función exponencial es constante en su dominio.



$a > 1$



$0 < a < 1$



$a = 1$

Una función exponencial especialmente importante es la que corresponde a la expresión

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ Cuando n se hace grande

Esta función se escribe como $f(x) = e^x$ cuya base es el número $e = 2{,}718281$ .....

Definición: la función exponencial natural es la función $f(x) = e^x$ con base e conocida como función exponencial

Función logarítmica.

Definición: Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. La función logarítmica con base a, denotada por $\log_a$, se define como

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Es decir que $\log_a$ es el exponente al cual debe elevarse la base a para obtener a x

Ejemplo. Formas logarítmica y exponencial

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
$\log_{10} 100.000 = 5$	$10^5 = 100.000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$

Propiedades de los logaritmos.

1. $\log_a 1 = 0$	2. $\log_a a = 1$	3. $\log_a a^x = x$	4. $a^{\log_a x} = x$

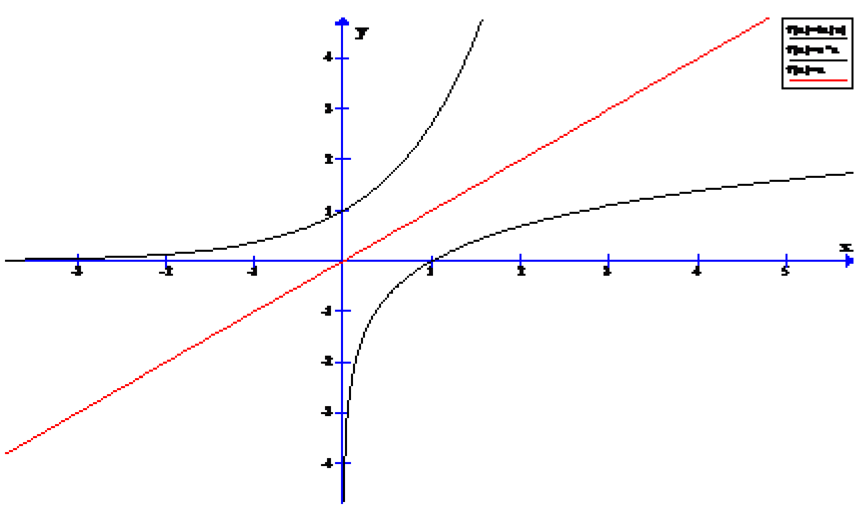
Logaritmo común.

El logaritmo con base 10 se llama logaritmo común y se denota omitiendo la base: $\log x = \log_{10} x$

Logaritmos naturales: El logaritmo con base e se llama logaritmo natural y se denota por $\ln$

$$\ln x = \log_e x$$

La función logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial $y = e^x$. Por definición de función inversa se tiene: $y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$ y la gráfica de las dos funciones es la siguiente:



Propiedades de los logaritmos naturales.

1. $\ln 1 = 0$	2. $\ln e = 1$	3. $\ln e^{x} = x$	4. $e^{\ln x} = x$

Use las propiedades de los logaritmos para evaluar la expresión.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $\log_3 3$	1	2) $\log_3 1$	0	3) $\log_3 3^2$	2	4) $\log_9 81$	2
5) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$	-3	6) $\log_{10}\sqrt{10}$	$\frac{1}{2}$	7) $\log_5 0.2$	-1	8) $2^{\log_2 37}$	37
9) $\log_9\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}$	10) $e^{\ln\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	11) $\log_8 0.25$	$-\frac{2}{3}$	12) $\ln e^4$	4
13) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$	-1	14) $\log_4\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$	15) $\log_4\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	16) $3^{\log_3 8}$	8

Hallar el valor de x

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
17) $\log_2 x = 5$	$x = 32$	18) $\log_2 16 = x$	$x = 4$	19) $\log_5 x = 4$	$x = 625$
20) $\log_3 x = 3$	$x = 27$	21) $\log_4 x = 2$	$x = 16$	22) $\log_x 25 = 2$	$x = 5$
23) $\log_x 1000 = 3$	$x = 10$	24) $\log_x 16 = 4$	$x = 2$	25) $\log_x 8 = \frac{3}{2}$	$x = 4$
26) $\log_x 6 = \frac{1}{2}$	$x = 36$	27) $\log_x 3 = \frac{1}{3}$	$x = 27$		

Leyes de los logaritmos

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sea $A, B \wedge C$ números reales cualesquiera con $A > 0 \wedge B > 0$

1.) $\log_a (AB) = Log_a A + \log_a B$

2.) $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = Log_a A - \log_a B$

3.) $\log_a\left(A^C\right) = C Log_a A$

Use las leyes de los logaritmos para evaluar las siguientes expresiones

Ejercicio	Rta	Ejercicio	Rta	Ejercicio	Rta
28) $\log_2 160 - \log_2 5$	5	29) $\log 4 + \log 25$	2	30) $\log_2 8^{33}$	99
31) $\log_4 192 - \log_4 3$	3	32) $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$	2	33) $\ln\left(\ln e^{e^{200}}\right)$	200
34) $\log 6 - \log 12 + \log 20$	1	35) $\log\left(\log 10^{10000}\right)$	4	36) $\log_4 16^{100}$	200
37) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$	-2	38) $\log \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$	$-\dfrac{3}{2}$		

Use las leyes de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
39) $\log_2(2x)$	$1+\log_2 x$	40) $\log_3(5y)$	$\log_3 5+\log_3 y$
41) $\log_2(x(x-1))$	$\log_2 x+\log_2(x-1)$	42) $\log_5 \frac{x}{2}$	$\log_5 x-\log_5 2$
43) $\log 6^{10}$	$10\log 6$	44) $\ln\sqrt{z}$	$\frac{1}{2}\ln z$
45) $\log_2\left(AB^2\right)$	$\log_2 A+2\log_2 B$	46) $\log\sqrt{\frac{x^2}{\left(x^5\right)\left(x^3-7\right)^2}}$	$\frac{1}{2}\left[-3\log x-2\log\left(x^3-7\right)\right]$
47) $\log_3(x\sqrt{y})$	$\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 y$	48) $\log\left(\frac{x^3y^4}{z^6}\right)$	$3\log x+4\log y-6\log z$
49 $\log_5\sqrt[3]{x^2+1}$	$\frac{1}{3}\log_5\left(x^2+1\right)$	50) $\log_9\left(\frac{x^2}{yz^3}\right)$	$2\log_9 x-\log_9 y-3\log_9 z$
51) $\ln\sqrt{ab}$	$\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$	52) $\log\left(\frac{10^x}{x\left(x^2\right)\left(x^4+2\right)}\right)$	$x\log 10-3\log x-\log\left(x^4+2\right)$
53) $\log_2(xy)^{10}$	$10\left(\log_2 x+\log_2 y\right)$	54) $\log\left(\frac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right)$	$2\log a-4\log b-\frac{1}{2}\log c$
55) $\log\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}$	$\log x-\frac{1}{3}\log(1-x)$	56) $\log_6\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	$\frac{1}{2}\left[\log_5(x-1)-\log_5(x+1)\right]$
57) $\ln\left(x\sqrt{\frac{y}{z}}\right)$	$\ln x+\frac{1}{2}(\ln y-\ln z)$	58 $\log_2\left(\frac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$	$\log_2 x+\log_2\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\log_2\left(x^2-1\right)$
59 $\log_6\sqrt[4]{17}$	$\frac{1}{4}\log_6 17$	60) $\log\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$	$\frac{1}{2}\left[\log x+\frac{1}{2}\log\left(y+\frac{1}{2}\log z\right)\right]$
61 $\ln\sqrt[3]{3r^2s}$	$\frac{1}{3}(\ln 3+2\ln r+\ln s)$	62) $\ln\left(\frac{x^3\sqrt{x-1}}{3x+4}\right)$	$3\ln x+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\ln(3x+4)$

Use las leyes de los logaritmos para combinar las siguientes expresiones

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
63) $\log_3 5+5\log_3 2$	$\log_3 160$	64) $4\log x-\frac{1}{3}\log\left(x^2+1\right)+2\log(x-1)$	$\log\frac{x^4(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2+1}}$
65) $\log_2 A+\log_2 B-2\log_2 C$	$\log_2\frac{AB}{C^2}$	66) $\frac{1}{3}\log(2x)+\frac{1}{2}\left[\log(x)-\log\left(x^4-x^2\right)\right]$	$\log\left[\sqrt[3]{2x}\sqrt{\frac{x}{x^4-x^2}}\right]$
67) $\log 12+\frac{1}{2}\log 7-\log 2$	$\log 6\sqrt{7}$	68) $\ln(a+b)+\ln(a-b)-2\ln c$	$\ln\frac{a^2-b^2}{c^2}$
69) $\log_5\left(x^2-1\right)-\log_5(x-1)$	$\log_5\frac{x^2-1}{x-1}$	70) $2\left(\log_5 x+2\log_5 y-3\log_5 z\right)$	$\log_5\left(\frac{xy^2}{z^3}\right)^2$

71 $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$	-2	72) $\log_a b + c\log_a d - r\log_a s$	$\log_a\left(\frac{bd^c}{s^r}\right)$

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Una ecuación exponencial es aquella en la que la variable esta en el exponente, ejemplo $2^x = 3$

Se resuelve utilizando el axioma de igualdad y transposición de términos.

Resolver las siguientes ecuaciones

a) $3^{x+2} = 7$ b) $8e^{2x} = 20$
c) $e^{3-2x} = 4$ d) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
c) $3xe^x + x^2e^x = 0$ f) $\log_2(x+2) = 5$
g) $\ln x = 8$ h) $\log_2(25 - x) = 3$
i) $4 + 3\log(2x) = 16$ j) $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$

Resolver las siguientes ecuaciones

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
73) $x^2 2^x - 2^x = 0$	$x = \pm 1$	74) $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$	$x = 2 \wedge x = -1$
75) $4x^3e^{-3x} - 3x^4e^{-3x} = 0$	$x = 0 \wedge x = 4/3$	76) $x^2e^x + xe^x - e^x = 0$	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
77) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$	$x = \ln 2 \wedge x = 0$	78) $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$	$x = \frac{\ln\|3\|}{2}$
79) $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$	$x = \ln\|4\|$	80) $\ln x = 10$	$x = e^{10}$
81) $\ln(2 + x) = 1$	$x = e - 2$	82) $2\log x = \log 2 + \log(3x - 4)$	$x = 4 \wedge x = 2$
83) $\log(x - 4) = 3$	$x = 1004$	84) $\log_5 x + \log_5(x+1) = \log_5 20$	$x = 4$
85) $\log_3(2 - x) = 3$	$x = -25$	86) $2 - \ln(3 - x) = 0$	$x = 3 - e^2$
87) $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$	$x = 3 \wedge x = -2$	88 $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x-2)$	$x = 5$
89) $\log x = -2$	$x = \frac{1}{100}$	90) $\log x + \log(x-1) = \log(4x)$	$x = 0 \wedge x = 5$
91) $\log(3x + 5) = 2$	$x = 95/3$	92) $\log_5(x+1) - \log_5(x-1) = 2$	$x = 13/12$
93) $\log x + \log(x - 3) = 1$	$x = 5$	94) $\log_9(x-5) + \log_9(x+3) = 1$	$x = 6$
95 $\log(x+3) = \log x + \log 3$	$x = 3/2$		