ÁNGULOS

Ángulo es la abertura entre dos semirrectas que parten del mismo origen. Las semirrectas se llaman lados del ángulo. El punto donde se cortan recibe el nombre de vértice, se denota $< A$.

MEDIDA ANGULAR

Definición de medida en radianes: Sí un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en radianes (rad) es la longitud del arco que subtiende el ángulo.

La circunferencia del círculo de radio 1 es 2π , entonces, una revolución completa tiene medida $2\pi rad$. Puesto que una revolución completa medida en grados es 360° y medida en radianes es 2π, se obtiene la siguiente relación

$$180° = \pi rad$$

Entonces $\quad 1rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 \qquad 1° = \frac{\pi}{180} rad$

Ejemplo:

a) Exprese 60° en radianes

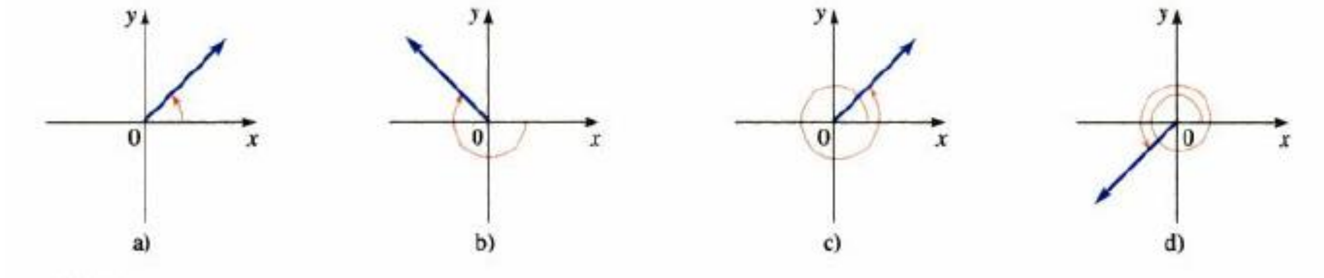
b) Exprese $\frac{\pi}{6} rad$ en grados

Expresar en radianes o en grados.

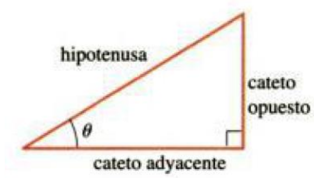
	Respuesta		Respuesta		Respuesta		Respuesta
1) $72°$	$\frac{2\pi}{5}$	2) $54°$	$\frac{3\pi}{10}$	3) $-45°$	$-\frac{\pi}{4}$	4) $-60°$	$-\frac{\pi}{3}$
5) $-75°$	$-\frac{5\pi}{12}$	6) $300°$	$\frac{5\pi}{3}$	7) $60°$	$\frac{\pi}{3}$	8) $135°$	$\frac{3\pi}{4}$
9) $96°$	$\frac{8\pi}{15}$	10) $15°$	$\frac{\pi}{12}$	11) $12°$	$\frac{\pi}{15}$	12) $225°$	$\frac{5\pi}{4}$
13) $-\frac{3\pi}{2}$	$-270°$	14) $-\frac{5\pi}{4}$	$-225°$	15) $\frac{11\pi}{3}$	$660°$	16) $\frac{7\pi}{6}$	$210°$
17) $\frac{\pi}{10}$	$18°$	18) $\frac{5\pi}{18}$	$50°$	19) $-\frac{2\pi}{15}$	$24°$	20) $-\frac{13\pi}{12}$	$195°$
21) $\frac{8\pi}{3}$	$480°$	22) $\frac{17\pi}{4}$	$765°$	23) $\frac{3\pi}{4}$	$135°$	24) $\frac{\pi}{5}$	$36°$

Ángulos en posición estándar.

Un ángulo está en posición estándar si se dibuja en el plano xy con su vértice en el origen y su lado inicial en el eje x



TRIGONOMETRÍA DE ÁNGULOS RECTOS

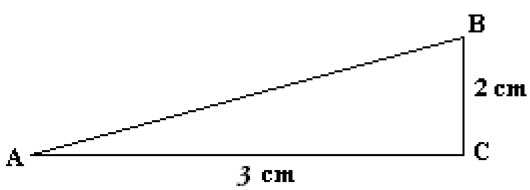


RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS		
$sen\theta = \dfrac{cateto \ \ opuesto}{hipotenusa}$	$\cos\theta = \dfrac{cateto \ \ adyacente}{hipotenusa}$	$\tan\theta = \dfrac{cateto \ \ opuesto}{cateto \ \ adyacente}$
$\csc\theta = \dfrac{hipotenusa}{cateto \ \ opuesto}$	$\sec\theta = \dfrac{hipotenusa}{cateto \ \ adyacente}$	$\cot\theta = \dfrac{cateto \ \ adyacente}{cateto \ \ opuesto}$

Ejercicios.

1) Si $sen\theta = \dfrac{3}{5}$ bosqueje un triángulo con ángulo θ agudo y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de θ.

2) Calcula todas las razones trigonométricas de los ángulos agudos del siguiente triángulo rectángulo:



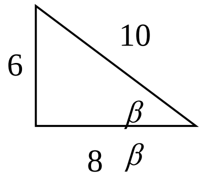
3) Si $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ bosqueje un triángulo con ángulo β agudo y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de β simplificadas y racionalizadas.

4) Si $\tan\alpha = \dfrac{5}{9}$ bosqueje un triángulo con ángulo α agudo y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de α.

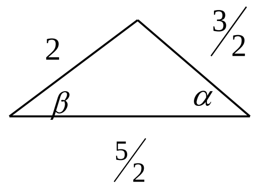
5) Si $\cos\beta = 0{,}2$ bosqueje un triángulo con ángulo β agudo y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de β.

6) En los siguientes triángulos rectángulos, calcular las seis razones trigonométricas para sus ángulos agudos.

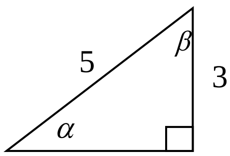
a)



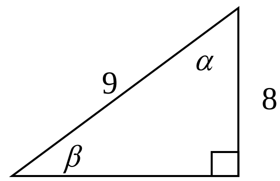
b)



c)



d)

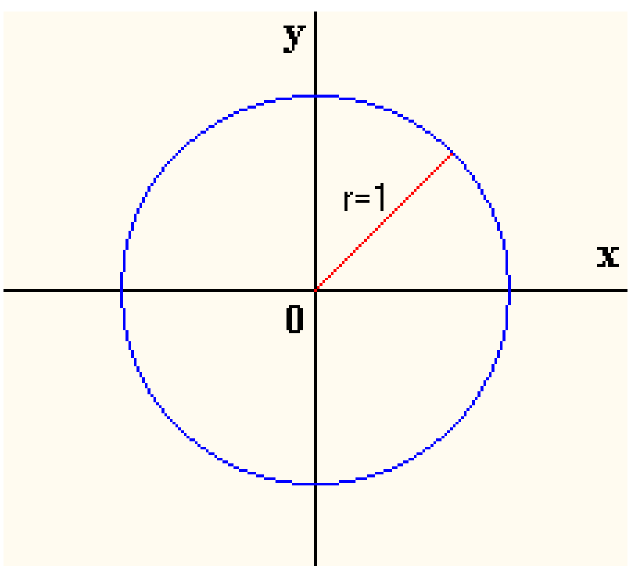


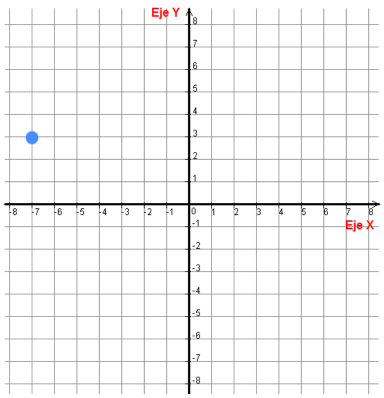
CÍRCULO UNITARIO

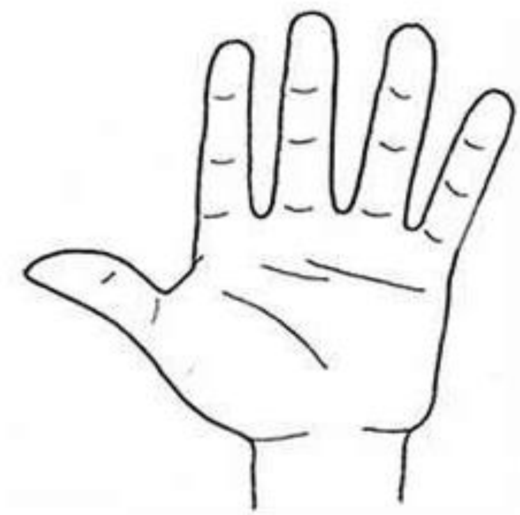
El círculo unitario es el que tiene un radio igual a 1 y su centro está en el origen de un plano xy. Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

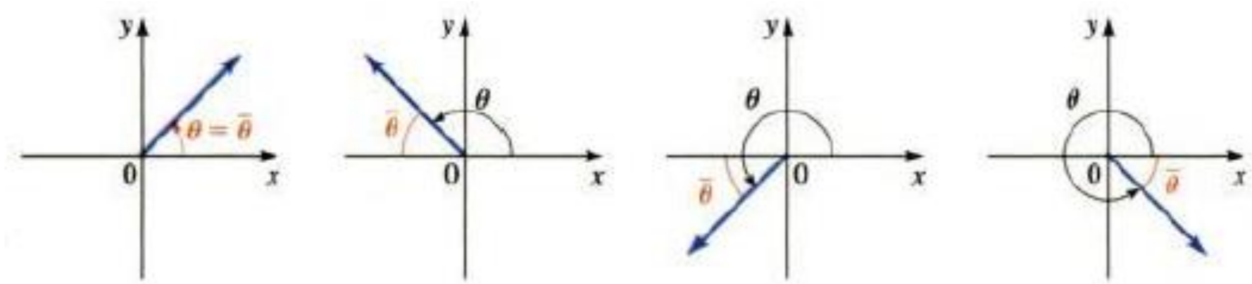






Signos positivos de las funciones trigonométricas

Ángulo de referencia
Sea θ un ángulo en posición estándar. El ángulo de referencia $\bar{\theta}$ relacionado con θ es el ángulo formado por el lado terminal de θ y el eje x



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

Razón	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**	**210°**	**225°**	**240°**	**270°**	**300°**	**315°**	**330°**	**360°**
$sen\,\alpha$																	
$\cos\alpha$																	
$\tan\alpha$																	
$\cot\alpha$																	
$\sec\alpha$																	
$\csc\alpha$																	

EJECICIOS DE APLICACIÓN

En los siguientes ejercicios los lados de un triángulo rectángulo se representan con las letras a, b y c, siendo siempre a la hipotenusa. Los lados del triángulo se representan con las letras A, B y C, siendo siempre A el ángulo recto, B el ángulo opuesto a b y C el ángulo opuesto a c. Usando exclusivamente la definición de las razones trigonométricas involucradas en cada caso, calcula el lado que se pide:

a) a = 40 m; B = 30º. Hallar b.

b) a = 40 cm; B = 30º. Hallar c.
c) a = 12 dm; C = 60º. Hallar b.
d) a = 12 Hm; C = 60º. Hallar c.
e) b = 20 m; B = 30º. Hallar a.
f) b = 20 mm; B = 45º. Hallar c.
g) c = 20 m; B = 30º. Hallar a.
h) b = 20 Km; C = 45º. Hallar c.

2) Calcular la altura de una antena de radio si su sombra mide 100 m cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 30º con la horizontal

3) Determinar la distancia a la que se encuentra un castillo que está situado en la orilla opuesta de un río, sabiendo que la torre más alta del mismo se ve desde nuestra orilla bajo un ángulo de 60º y alejándonos 100 m del río el ángulo es de 30º.

4) Desde un cierto punto del terreno se mira a lo alto de una montaña y la visual forma un ángulo de 60º con el suelo. Al alejarse 200 m de la montaña, la visual forma 30º con el suelo. Halla la altura, h, de la montaña.

5) Desde un barco se ve el punto más alto de un acantilado con un ángulo de 45º. Sabiendo que la altura del acantilado es de 200 m, ¿a qué distancia se halla el barco del pie del acantilado?

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades reciprocas

$\boxed{css\theta = \dfrac{1}{sen\theta}}$ $\boxed{\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}}$ $\boxed{\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}}$

$\boxed{\tan\theta = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}}$ $\boxed{\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{sen\theta}}$

Identidades pitagóricas

$\boxed{sen^2 x + \cos^2 x = 1}$ Despejando cada función $\boxed{sen^2 x = 1 - \cos^2 x}$ $\boxed{\cos^2 x = 1 - sen^2 x}$

$\boxed{1 + \tan^2 x = \sec^2 x}$ Despejando cada función $\boxed{1 = \sec^2 x - \tan^2 x}$ $\boxed{\tan^2 x = \sec^2 x - 1}$

$\boxed{1 + \cot^2 x = \csc^2 x}$ Despejando cada función $\boxed{1 = \csc^2 x - \cot^2 x}$ $\boxed{\cot^2 x = \csc^2 x - 1}$

Identidades para ángulos opuestos

$sen(-x) = -sen(x)$ | $\cos(-x) = \cos(x)$ | $\tan(-x) = -\tan(x)$

$\csc(-x) = -\csc t(x)$ | $\sec(-x) = \sec(x)$ | $\cot(-x) = -\cot(x)$

Identidades del ángulo medio

$sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ | $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ | $\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

Paso de producto a suma

$$senu.\cos v = \frac{1}{2}\left[sen(u-v) + sen(u+v)\right]$$
$$senu.senv = \frac{1}{2}\left[\cos(u-v) - \cos(u+v)\right]$$
$$\cos u.\cos v = \frac{1}{2}\left[\cos(u-v) + \cos(u+v)\right]$$
$$\cos u.senv = \frac{1}{2}\left[-sen(u-v) + sen(u+v)\right]$$

Suma y diferencia de ángulos

$$sen(x \pm y) = sen(x)\cos(y) \pm \cos(x)sen(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp sen(x)sen(y)$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

Identidades de cofunciones

$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = senx$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

$\csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$ | $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

Fórmulas para el ángulo doble

Fórmula del seno.	$sen2\theta = 2sen\theta\cos\theta$
Fórmula del coseno.	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - sen^2\theta$
	$= 1 - 2sen^2\theta$
	$= 2\cos^2\theta - 1$
Fórmula de la tangente.	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

Calcular el valor de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de:

a) 15° = (45°-30°) o (60°-45°)
b) 75° = (45°-30°)
c) 150° = (180°-30°)
d) 135° = (180°-45°)
e) 315° = (360°-45°)
f) 105° = (60°+45°)

Simplificación de expresiones trigonométricas

Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\cos t + \tan t\, sen t$

b) $\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1 + sen\alpha}$

Ejercicios.

Simplificar las siguientes expresiones trigonométricas:

1. $\cos t \tan t$	2. $\cos t \csc t$	3. $sen\theta \sec\theta$	4. $\tan\alpha \csc\alpha$
5. $\tan^2 t - \sec^2 t$	6. $senu + \cot u \cos u$	7. $\cos^2 u(1 + \tan^2 u)$	8. $\cos^3 x + sen^2 x \cos x$
9. $\dfrac{\sec\alpha - \cos\alpha}{sen\alpha}$	10. $\dfrac{\cot\alpha}{\csc\alpha - sen\alpha}$	11. $\dfrac{\tan\alpha}{\sec\alpha}$	12. $\dfrac{\sec\alpha}{\csc\alpha}$
13. $\dfrac{senx \sec x}{\tan x}$	14. $\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 + \sec\alpha}$	15. $\dfrac{\tan\theta}{\sec(-\theta)}$	16. $\dfrac{\sec^2\alpha - 1}{\sec^2\alpha}$
17. $\dfrac{\sec z - \cos z}{\tan z}$	18. $\dfrac{1 + \csc y}{\cos y + \cot y}$	19. $\dfrac{sen\alpha}{\csc\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha}$	20. $\dfrac{1 + senu}{\cos u} + \dfrac{\cos u}{1 + senu}$
21. $\dfrac{2 + \tan^2\theta}{\sec^2\theta} - 1$	22. $\dfrac{1 + \cot A}{\csc A}$	23. $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$	24. $\tan u \cos u \csc u$

Demostración de identidades trigonométricas

Criterios para demostrar identidades trigonométricas.

1. Empezar con un miembro. Elija un lado de la ecuación y trate de transformarlo en el otro. Se recomienda comenzar con el lado más complicado.
2. Aplicar identidades conocidas. Use el álgebra y las identidades que conozca. Obtenga común denominador, factorice y aplique las identidades fundamentales para simplificar las expresiones.
3. Convertir en senos y cosenos. Si encuentra difícil continuar, es útil volver a escribir todas las funciones en términos de senos y de cosenos.

Comprobar las siguientes identidades

a) $\cos\theta(\sec\theta-\cos\theta)\equiv sen^2\theta$ b) $2\tan x\sec x\equiv\frac{1}{1-senx}-\frac{1}{1+senx}$

c) $\frac{\cos u}{1-senu}\equiv\sec u+\tan u$

Comprobar las siguientes identidades

1. $\tan\theta\cdot\cot\theta\equiv1$	2. $\csc\theta\cdot\cos\theta\equiv\cot\theta$	3. $\csc^2\theta-\cot^2\theta\equiv1$
4. $\frac{\csc^2\alpha-1}{\cot^2\alpha}\equiv1$	5. $\frac{\tan\alpha}{\cot\alpha}\equiv\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$	6. $\frac{\sec\alpha}{\csc\alpha}\equiv\tan\alpha$
7. $sen^2\theta(1+\cot^2\theta)\equiv1$	8. $(\sec\beta-1)(\sec\beta+1)\equiv\tan^2\beta$	9. $\tan\theta+\cot\theta\equiv\sec\theta\cdot\csc\theta$
10. $(\csc\theta+\cot\theta)^2\equiv\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$	11. $\frac{1}{\sec^2\theta}\equiv sen^2\theta\cdot\cos^2\theta+\cos^4\theta$	12. $\sec^2\theta+\csc^2\theta\equiv\frac{1}{sen^2\theta\cdot\cos^2\theta}$
13. $\tan\theta+\frac{\cos\theta}{1+sen\theta}\equiv\sec\theta$	14. $\frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}\equiv2\cos^2\beta-1$	15. $\frac{1+sen\alpha}{1-sen\alpha}-\frac{1-sen\alpha}{1+sen\alpha}\equiv4\tan\alpha\cdot\sec\alpha$
16. $\sec\theta-sen\theta\cdot\tan\theta\equiv\cos\theta$	17. $sen\theta(\csc\theta-sen\theta)\equiv\cos^2\theta$	18. $(sen\theta-\cos\theta)^2+(sen\theta+\cos\theta)^2\equiv2$
19. $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta)\equiv1$	20. $(1-sen^2\theta)(1+\tan^2\theta)\equiv1$	21. $\cos\beta(\tan\beta+\cot\beta)\equiv\csc\beta$
22. $\sec\theta+\tan\theta\equiv\frac{\cos\theta}{1-sen\theta}$	23. $\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\equiv\frac{sen\theta}{sen\theta+\tan\theta}$	24. $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\equiv4\cot\alpha\cdot\csc\alpha$
25. $\sec^4\alpha-\tan^4\alpha\equiv\frac{1+sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}$	26. $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\equiv(\csc\alpha-\cot\alpha)^2$	27. $1-\frac{sen^2\alpha}{1-\cos\alpha}\equiv-\cos\alpha$
28. $senB+\cos B\cot B\equiv\csc B$	29. $\cot^2\theta\equiv\cos^2\theta+(\cot\theta\cdot\cos\theta)^2$	30. $\tan^2\beta\cos^2\beta+\cot^2\beta sen^2\beta\equiv1$
31. $\frac{\tan^2\beta}{\sec\beta+1}+1\equiv\sec\beta$	32. $\frac{\cos^2\beta}{1+sen\beta}\equiv1-\frac{1}{\csc\beta}$	33. $\frac{1}{\sec\alpha-\tan\alpha}\equiv\sec\alpha+\tan\alpha$
34. $\frac{\sec\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}\equiv sen\alpha$	35. $\frac{1-\cos\beta}{sen\beta}\equiv\frac{sen\beta}{1+\cos\beta}$	36. $\frac{\cot^2\beta}{\csc\beta-1}\equiv\csc\beta+sen^2\beta+\cos^2\beta$
37. $\frac{1}{\csc x-\cot x}\equiv\csc x+\frac{1}{\tan x}$	38. $\frac{\tan z-senz}{sen^3z}\equiv\frac{\sec z}{1+\cos z}$	39. $\frac{(senx+\cos x)^2}{sen^2x-\cos^2x}\equiv\frac{sen^2x-\cos^2x}{(senx-\cos x)^2}$
40. $\frac{senx-1}{senx+1}\equiv\frac{-\cos^2x}{(senx+1)^2}$	41. $\tan\theta\cdot\cot\theta-sen^2\theta\equiv\cos^2\theta$	42. $(sen\theta+\cos\theta)^4\equiv(1+2sen\theta\cos\theta)^2$
43. $\frac{\tan u-\cot u}{\tan^2u-\cot^2u}\equiv senu\cos u$	44. $(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)\equiv\frac{1}{\csc^2\theta}$	45. $\frac{sen^3\theta+\cos^3\theta}{sen\,\theta+\cos\theta}\equiv1-sen\,\theta\cos\theta$
46. $\frac{1+senx}{1-senx}\equiv(\tan x+\sec x)^2$	47. $(\tan\theta+\cot\theta)^4\equiv\csc^4\theta\sec^4\theta$	48. $sen^2\theta+\cos^2\theta+\tan^2\theta\equiv\sec^2\theta$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina ecuación trigonométrica. Para resolver una ecuación trigonométrica, calculamos todos los valores de la variable que hacen que la ecuación sea cierta. A excepción de algunos problemas de aplicación, siempre se usan radianes.

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas.

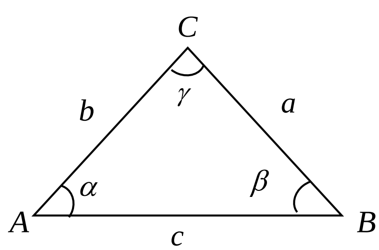
1. $2senx-1=0$
2. $\tan^2 x-3=0$
3. $2\cos^2 x-7\cos x+3=0$
4. $1+senx=2\cos^2 x$
5. $sen2x-\cos x=0$
6. $\cos x+1=senx$ en el intervalo $[0,2\pi]$
7. $2sen3x-1=0$

Calcular todas las soluciones de las ecuaciones

1. $\cos x+1=0$	2. $senx+1=0$	3. $\sqrt{2}\cos x-1=0$
4. $\sqrt{3}\tan x+1=0$	5. $\cot x+1=0$	6. $4\cos^2 x-1=0$
7. $2\cos^2 x-1=0$	8. $\sec^2 x-2=0$	9. $\csc^2 x-4=0$
10. $3\csc^2 x-4=0$	11. $1-\tan^2 x=0$	12. $\cos x(2senx+1)=0$
13. $\sec x(2\cos x-\sqrt{2})=0$	14. $(\tan x+\sqrt{3})(\cos x+2)=0$	15. $(2\cos x+\sqrt{3})(2senx-1)=0$
16. $\cos x senx-2\cos x=0$	17. $\tan x senx+senx=0$	18. $4\cos^2 x-4\cos x+1=0$
19. $2sen^2x-senx-1=0$	20. $6\cos^2 x+\cos 2x-1=0$	21. $sen^2x+\cos 2x-1=0$
22. $senx+\cos x-\sqrt{2}=0$	23. $\tan^2 x-4\tan x+3=0$	24.

TRIÁNGULOS OBLICUOS

Un **triángulo oblicuo** es aquel que no contiene un ángulo recto. Se usaran las letras *a*, *b*, *c*, y α,β,γ para nombrar los lados y los ángulos del triángulo.



Ley de senos: Si ABC es un triángulo oblicuo, entonces $\frac{sen\alpha}{a}=\frac{sen\beta}{b}=\frac{sen\gamma}{c}$

Si en un problema de triángulos dan como datos 2 ángulos y un lado, se usa la ley de los senos. Si por el contrario dan dos lados y el ángulo comprendido entre ellos o los tres lados se usa la ley del coseno.

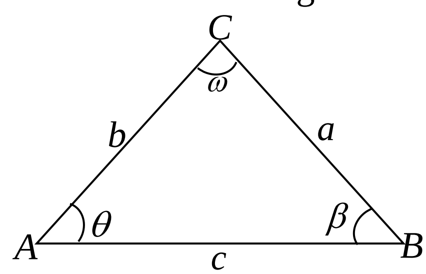
Ley de cosenos: Si ABC es un triángulo oblicuo, entonces

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Resolver los siguientes ejercicios.

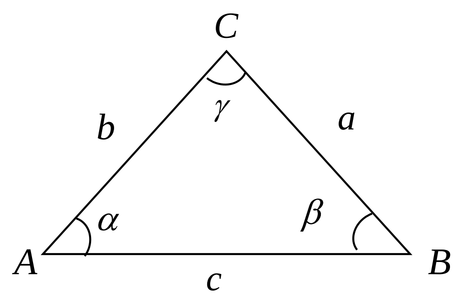
1. A partir de la figura dada determine los elementos restantes del triángulo teniendo en cuenta las condiciones de cada caso:



a) $\omega = 65°$, $\theta = 50°$, $b = 12$
b) $\beta = 60°$, $a = 7$, $c = 7$
c) *a=7, b=9, c=12*
d) $\omega = 56°30'$, $b = 10$, $c = 5$
e) $\theta = 120°$, $a = 4$, $c = 8$
f) $c = 5$, $b = 3$, $a = 6$

2. Encuentre las partes restantes del triángulo teniendo en cuenta las condiciones de cada caso:

a) $\beta = 20°, \gamma = 80°$ y c = 7
b) $\alpha = 40°$, $\gamma = 76°$ y a = 10
c) $\beta = 49°\ 40´$, $\gamma = 60°20´$ y c = 540
d) $\beta = 60°$, a = 15 y b = 10
e) $\alpha = 112$, a = 7 y b = 18
f) a=4.5 cm., B=30º y C= 78º.



3. Tres puntos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia $AB = 6km$, $BC = 9km$ y el ángulo que forman entre ellas es de *120°*. ¿Cuánto distan A y C?

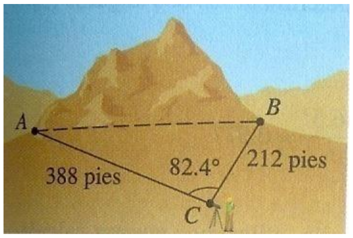
4. Dos personas caminan por un sendero, pero en un punto se bifurca formando un ángulo de 38° y cada uno va por su lado, uno camina a 3 km/h y el otro a 3.5 km/h, ¿a qué distancia se encuentran al cabo de media hora?

5. Desde los puntos A y B de una misma orilla de un río y separados entre sí 12 m, se observan el pie P y la copa C de un pino, situado en la orilla opuesta. Calcular la altura del pino, sabiendo que los ángulos miden *PAB=42°, PBA=37° y PAC=50°*

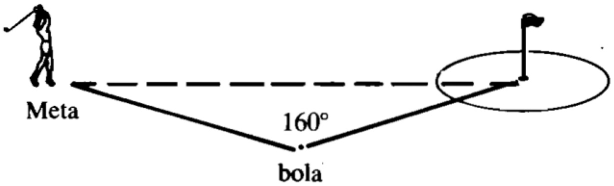
6. Dos piedras se encuentran a la orilla de una playa a una distancia uno de otro de 1.8 Km en los puntos A y B, y se encuentra una bolla situada en un punto C. Si la piedra A mide un ángulo *CAB=79.3°* y el que está en B mide un ángulo *CBA=43.6°*, ¿a qué distancia está la bolla de la costa?

7. Se proyecta la construcción de un túnel a través de una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo se ubica en un punto "C" y mide las distancias hasta los puntos proyectados para la entrada y la salida del túnel, como aparece en la figura. Además

mide el ángulo en C. Utilice los datos del topógrafo para hacer un cálculo de la longitud del túnel.



8. La distancia entre la meta y un hoyo particular de golf es de 370 m. Una golfista le pega a la pelota y la coloca a una distancia de 210 m. Desde el punto donde está la pelota, ella mide un ángulo de 160 entre la meta y el hoyo, encuentre el ángulo de su lanzamiento y cuál es la distancia entre la bola y el hoyo.



9. Desde un punto se observa una manzana con un ángulo de 36º, si avanzamos 6 m hacia ella en línea recta y la observamos de nuevo, el ángulo es de 50º. ¿A qué altura se encuentra la manzana?

10. Un poste de la energía está inclinado formando un ángulo de 12º con la vertical. Se encuentra sostenido por un cable anclado a 1.5 m y en el sentido contrario a la inclinación, formando un ángulo de 60º. A qué altura del poste se encuentra el otro extremo del cable? ¿Cuál es la longitud del cable?

11. Una persona camina 3 m en dirección N 30° E; luego gira hacia el Sur y se desplaza cinco metros. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

12. Un piloto está volando sobre una carretera recta. Él encuentra que los ángulos de depresión a dos postes indicadores de millas A y B sobre la carretera tienen los valores de 32° y 48° respectivamente. Si los postes están separados 5 millas:

a) Determine la distancia del aeroplano al poste A.
b) Determine la altitud del aeroplano.

13. Dos remolcadores marítimos que están separados 120pies, tiran de una barcaza. Si la longitud de uno de los cables es de 212pies y la del otro es 230pies, determine cuál es el ángulo que forman los dos cables.

14. Un niño está haciendo volar dos cometas simultáneamente. Una de ellas tiene 380 pies de cordón y la otra, 420pies. Se supone que el ángulo entre los dos cordones es de 30°. Estime la distancia entre las dos cometas.

15. Del techo de un edificio de 50m de altura se ve un globo con un ángulo de elevación de 20°. De una ventana del mismo edificio situada 20m bajo el nivel del techo, el ángulo de elevación al globo es de 30°.

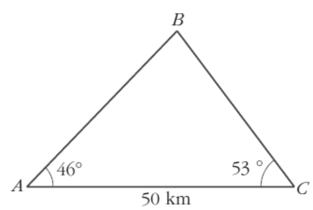
a) Determine la distancia horizontal del edificio al globo.
b) Determine la altura del globo sobre el suelo.

16. Al instalar en forma vertical una antena en el techo de una casa, inclinado 15°, los cables que la sostienen forman un ángulo de 45° con el tubo de 1,5 metros que la sostienen. Halle las longitudes de los cables:

17. Dos trenes parten simultáneamente de una misma estación, en direcciones tales que forman un ángulo de 30º. Uno va a 20Km/h y el otro va a 30km/h. después de dos horas de viaje ¿A qué distancia se encuentran?

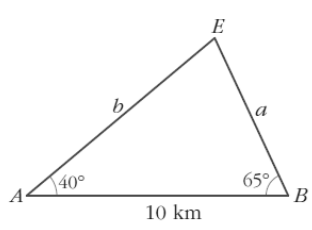
18. Un topógrafo elige un punto C a 343 metros de un punto A y a 485 metros de otro punto B, ¿cuál es la distancia entre A y B si el ángulo BAC mide 49°30'?

19. Un barco *B* pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, *A* y *C*, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: *BAC* = 46º y *BCA* = 53º. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?



20. Dos automóviles parten del mismo punto y viajan sobre dos carreteras que forman un ángulo de 84°. ¿Cuál es la distancia comprendida entre los dos automóviles después de 20 minutos si sus velocidades son de 90 y 75 kilómetros por hora, respectivamente?

21. Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, *A* y *B*, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con *AB* ángulos de 40o y 65o. ¿A qué distancia de *A* y *B* se encuentra la emisora?



22. Una antena está sujeta con dos cables de acero de tal modo que forman ángulos de elevación de 58° y 40° respectivamente con el suelo. Si el cable opuesto al ángulo menor, mide 50.5m. Hallar la altura de la antena y la longitud del otro cable.

23. Dos barcos salen de un mismo puerto, y al mismo tiempo, en rutas rectilíneas que forman entre sí un ángulo de 50°. El primero navega con velocidad constante de 75km/h y el segundo a 55km/h. Encontrar la distancia que separa a los barcos dos horas y media después de haber partido.

24. Una avioneta, en el aire, se observa desde dos puntos A y B, distanciados 750m. El observador en A estima que el ángulo de elevación a la avioneta es 60°, en tanto que el observador desde B estima que el ángulo de elevación es de 76°. ¿Qué tan elevada está la avioneta?

25. Dos aviones salen del mismo aeropuerto, el uno hacia el norte y el otro a 40° al este del norte; el primero a una velocidad de 240km/h, y el segundo a 320km/h. ¿A qué distancia se encuentran después de 2 horas de vuelo?

26. En las orillas opuestas de un río se colocan dos estacas en los puntos A y B ; en la orilla donde está situado el punto A y a una distancia de 300m se coloca una tercera estaca; al medir los ángulos A y C se obtiene 124°40’ y 45°30’. Calcula la distancia entre A y B.

27. Un faro está situado a 18km y a 45° al norte del oeste de un muelle. Un barco sale a las 10am. y navega hacia el oeste a razón de 24km/h. ¿A qué hora se encontrará a 14km del faro?

28. Un piloto sale desde una ciudad A con un rumbo 38° al oeste del norte, recorriendo 120km; debido a una falla mecánica trata de regresar al punto de partida, pero por un error viaja 120km en dirección 56° al sur del oeste. ¿A qué distancia se encontrará de la ciudad A y en qué dirección debe viajar para llegar al punto de partida?

29. Dos lados adyacentes de un paralelogramo se cortan en un ángulo de 35° y tienen longitud de 3 y 8 pies. ¿Cuál es la longitud de la diagonal más corta del paralelogramo con tres cifras significativas?

30. Una antena de radio está sujeta con cables de acero, como se muestra en la figura. Hallar la longitud de los cables.