ANTIDERIVACIÓN

La operación inversa de la diferenciación se denomina antiderivación o antidiferenciación.

Definición: una función F se denomina antiderivada de la función f en un intervalo I.
Si $F'(x) = f(x) \ \forall x$ en I.

Ejemplo: si F es una función definida por

$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$

$\Rightarrow F'(x) = 12x^2 + 2x$

Entonces f es la derivada de F

F es la antiderivada de f

$G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$

$\Rightarrow G'(x) = 12x^2 + 2x$

Entonces g es la derivada de G

G es la antiderivada de g

En realidad cualquier función determinada por $4x^3 + x^2 + C$ (C = constante) es una antiderivada de f

<u>TEOREMA:</u> Si F es una antiderivada particular de f en un intervalo I, entonces cada antiderivada de f en I esta dada por

$$F(x) + C \quad (1)$$

Donde C es una constante arbitraria y todas las antiderivadas de f en I pueden obtenerse a partir de (1) asignando valores arbitrarios a C.

La antiderivación es el proceso mediante el cual se determina el conjunto de todas las antiderivadas de una función dada.

El símbolo $\int$ denota la operación de antiderivación y se escribe

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde $F'(x) = f(x)$

$$d[f(x)] = F(x)dx$$

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA ANTIDERIVACIÓN	
1. $\int 0dx = C$	2. $\int kdx = kx + C \qquad k = cte$
3. $\int dx = x + C$	4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
5. $\int [f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	6. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ Con $n \neq -1$
7. $\int x^{-1}dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	8. $\int e^x dx = e^x + C$
9. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln\lvert x\rvert} + C$	10. $\int senxdx = -\cos x + C$
11. $\int \cos xdx = senx + C$	12. $\int \sec^2 xdx = \tan x + C$
13. $\int \csc^2 xdx = -\cot x + C$	14. $\int \sec x \tan xdx = \sec x + C$
15. $\int \csc x \cot xdx = -\csc x + C$	16. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = sen^{-1}x + C$
17. $\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \cos^{-1} x + C$	18. $\int \dfrac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1} x + C$

Ejemplo

Integrar la siguiente función

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 5x}{x^2} dx$$

Solución

El denominador divide todos los términos y aplicando la propiedad 5

$$\int \frac{3x^3}{x^2} dx + \int \frac{x^2}{x^2} dx - \int \frac{5x}{x^2} dx$$

Aplicando la propiedad 4 y simplificando las x

$$3\int xdx + \int dx - 5\int \frac{1}{x} dx$$

Integrando

$$\boxed{\frac{3x^2}{2} + x - 5\ln\lvert x\rvert + c}$$

Resolver los siguientes ejercicios

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1. $\int (3x+4)dx$	$\frac{3x^2}{2}+4x+c$	2. $\int (10x^4-2x^6)dx$	$2x^5-\frac{2x^7}{7}+c$
3. $\int \sqrt{x}dx$	$\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+c$	4. $\int 7-\frac{4}{x^5}+\frac{2}{x^2}dx$	$7x+\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x}+c$
5. $\int (senx+\cos x)dx$	$-\cos x+senx+c$	6. $\int 5\sec^2 xdx$	$5\tan x+c$
7. $\int \frac{2t^3+t^2\sqrt{t}-1}{t^2}dt$	$t^2+\frac{2\sqrt{t^3}}{3}+\frac{1}{t}+c$	8. $\int \sqrt{y}(y-3)dy$	$\frac{2\sqrt{y^5}}{5}-2\sqrt{y^3}+c$
9. $\int \frac{senx}{\cos^2 x}dx$	$\sec x+c$	10. $\int \frac{\sec x}{\tan x+\cot x}dx$	$-\cos x+c$
11. $\int \frac{2x^3-5x^2+7}{\sqrt{x}}dx$	$\frac{4\sqrt{x^7}}{7}-2\sqrt{x^5}+14\sqrt{x}+c$	12. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx$	$3\sqrt[3]{x^2}+c$
13. $\int (2x-5)^2dx$	$\frac{4x^3}{3}-10x^2+25x+c$	14 $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx$	$\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+2\sqrt{x}+c$
15. $\int (\cos x-5senx-7)dx$	$senx+5\cos x-7x+c$	16. $\int \frac{9}{1+x^2}dx$	$9\tan^{-1}x+c$
17. $\int (\sqrt{x}-x)^2dx$	$\frac{x^2}{2}-\frac{4\sqrt{x^5}}{5}+\frac{x^3}{3}+c$	18. $\int \cot^2 x(1+\tan^2 x)dx$	$-\cot x+c$
19. $\int \left(\frac{2}{x}+e^x-3\cos x\right)dx$	$2\ln\lvert x\rvert+e^x-3senx+c$	20. $\int \frac{5t^2+7}{t^{4/3}}dt$	$3\sqrt[3]{t^5}-\frac{21}{\sqrt[3]{t}}+c$
21. $\int \frac{-8x^4+3x^2+9}{3x^3}dx$	$-\frac{4x^2}{3}+\ln\lvert x\rvert-\frac{3}{2x^2}+c$	22. $\int \frac{2\cot x-3sen^2x}{senx}dx$	$-2\csc x+3\cos x+c$
23. $\int \frac{(2t^3+t^2)^2}{\sqrt[5]{t^2}}dt$	$\frac{20\sqrt[5]{t^{33}}}{33}+\frac{5\sqrt[5]{t^{28}}}{7}+\frac{5\sqrt[5]{t^{23}}}{23}$	24. $\int \frac{2y^3+y^2\sqrt{y}-5y}{y^2}dy$	$y^2+\frac{2\sqrt{y^3}}{3}-5\ln\lvert y\rvert+c$
25. $\int \sqrt{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$	$\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+2\sqrt{x}+c$	26. $\int \sqrt[3]{x^2}\left(x^2+3x-4\right)dx$	$\frac{3\sqrt[3]{x^{11}}}{11}+\frac{9\sqrt[3]{x^8}}{8}-\frac{12\sqrt[3]{x^5}}{5}$
27. $\int (\sqrt{x}+3x)^2dx$	$\frac{x^2}{2}+\frac{12\sqrt{x^5}}{5}+3x^3+c$	28 $\int \frac{3x^2+5x-3}{\sqrt[3]{x}}dx$	$\frac{9\sqrt[3]{x^8}}{8}+3\sqrt[3]{x^5}-\frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2}$
29. $\int \frac{y^5+3y^2+9y}{3\sqrt[4]{y}}dy$	$\frac{4\sqrt[4]{y^{23}}}{69}+\frac{4\sqrt[4]{y^{11}}}{11}+\frac{12\sqrt[4]{y^7}}{7}$	30. $\int \frac{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}+9x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$	$\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+3x+\frac{27\sqrt[3]{x^4}}{4}+c$