

INTEGRAL DEFINIDA

Definición: si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Denotamos con $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y elegimos los puntos muestra $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentra en el i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f , desde a hasta b , es

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

La suma $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$ se llama **suma de Riemann**, en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866)

El problema del área.

1. Use rectángulos para estimar el área bajo la curva $y = x^2$ desde 0 hasta 1

Definición: el área de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots + f(x_n) \Delta x]$$

EL TEÓREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El Teorema fundamental del Cálculo, como su nombre lo indica es un importante resultado que relaciona el Cálculo Diferencial con el Cálculo Integral. En este capítulo se estudiarán las bases que permiten diseñar técnicas para el cálculo de integrales.

Primer teorema fundamental del cálculo: Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si F es la función definida por

$$f(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{Entonces}$$

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Segundo teorema fundamental del cálculo: Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

En donde F es cualquier antiderivada de f , esto es, una función tal que $F' = f$

ÁREAS BAJO Y ENTRE CURVAS

Función positiva: Para hallar el área seguiremos los siguientes pasos:

1° Se calculan los puntos de corte con el eje x , haciendo $f(x) = 0$ y resolviendo la ecuación

2° El área es igual a la integral definida de la función que tiene como límites de integración los puntos de corte

Ejercicio: Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 9 - x^2$ \wedge el eje x $A = 36u^2$

Hallar el área limitada por la recta $x + y = 10$, el eje x \wedge las rectas $x = 2$ y $x = 8$ $A = 30u^2$

Función negativa

Si la función es negativa en un intervalo $[a, b]$ entonces la gráfica de la función está por debajo del eje de abscisas. El área de la función viene dada por:

$$A = -\int_a^b f(x)dx = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

Ejercicio: Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - 4x$ \wedge el eje x $A = \frac{32}{3}u^2$

Función con valores positivos y negativos

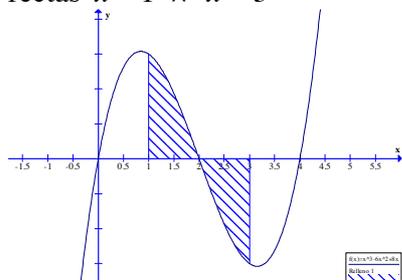
En ese caso el recinto tiene zonas por encima y por debajo del eje de abscisas. Para calcular el área de la función seguiremos los siguientes pasos:

1° Se calculan los puntos de corte con el eje x , haciendo $f(x) = 0$ y resolviendo la ecuación

2° Se ordenan de menor a mayor las raíces, que serán los límites de integración.

3° El área es igual a la suma de las integrales definidas en valor absoluto de cada intervalo

Ejemplo: Determine el área de la región limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, el eje x \wedge las rectas $x = 1$ \wedge $x = 3$



$$\int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx + \int_2^3 -(x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_1^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2 \right]_2^3 = \frac{7}{2}u^2$$

$$A = \frac{7}{2}u^2$$

Ejercicios

1. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 4x - x^2$ \wedge el eje x

$$A = \frac{32}{3}u^2$$

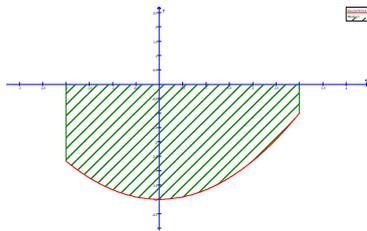
2. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - 4x$ \wedge el eje x

$$A = \frac{32}{3}u^2$$

3. Hallar el área de la región del plano limitada por la curva $y = \ln|x|$ entre el punto de corte con el eje x \wedge el punto de abscisa $x = e$

$$A = 1u^2$$

4. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = \frac{x^2}{3} - 4$, el eje x \wedge las ordenadas $x = -2$ \wedge $x = 3$



$$A = \frac{145}{9}u^2$$

5. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - 16$ \wedge el eje x

$$A = \frac{256}{3}u^2$$

6. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = 1 + \sqrt{x}$, el eje x \wedge las ordenadas $x = 0$ \wedge $x = 4$

$$A = \frac{28}{3}u^2$$

7. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^2 + 1$, el eje x \wedge las ordenadas $x = -1$ \wedge $x = 2$

$$A = 6u^2$$

8. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^2 - 7x + 10$, el eje x \wedge las ordenadas $x = 0$ \wedge $x = 3$

$$A = \frac{20}{3}u^2$$

9. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^3 + 7x^2 + 10x$ \wedge el eje x

$$A = \frac{253}{12}u^2$$

10. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^3 + x^2 - 2x$ \wedge el eje x

$$A = \frac{37}{12}u^2$$

11. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^2 + 2x - 3$, el eje x y las ordenadas $x = -3$ y $x = 1$

$$A = \frac{32}{3}u^2$$

12. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$ y el eje x

$$A = \frac{253}{12}u^2$$

13. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = 5x - x^2$, el eje x y las ordenadas $x = 1$ y $x = 3$

$$A = \frac{34}{3}u^2$$

14. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^2 - 6x + 5$ y el eje x

$$A = \frac{32}{3}u^2$$

15. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^2 + x + 4$ y el eje x

$$A = 42u^2$$

16. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = -x^2 - 4$, el eje x y las ordenadas $x = -2$ y $x = 2$

$$A = \frac{64}{3}u^2$$

17. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^3 - 6x$, el eje x y las ordenadas $x = 0$ y $x = 3$

$$A = \frac{45}{4}u^2$$

18. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^3 - 9x$, el eje x y las ordenadas $x = 0$ y $x = 5$

$$A = \frac{337}{4}u^2$$

19. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, el eje x y las ordenadas $x = -1$ y $x = 2$

$$A = \frac{157}{12}u^2$$

20. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ y el eje x

$$A = \frac{109}{6}u^2$$

21. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^2 - 2x + 3$ y las ordenadas $x = -2$ y $x = 1$

$$A = 15u^2$$

22. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje x

$$A = \frac{253}{12}u^2$$

23. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = \sqrt{x+1}$ y la ordenada $x = 8$

$$A = 18u^2$$

24. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = 6 - x - x^2$ y el eje x

$$A = \frac{125}{6}u^2$$

25. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = \frac{1}{x^2} - x$ el eje x , y las

ordenadas $x = 2$ y $x = 3$

$$A = \frac{7}{3}u^2$$

26. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^2 - x - 6$ el eje x , y las ordenadas $x = 0$ y $x = 4$

$$A = \frac{49}{3}u^2$$

27. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^2 - 1$ el eje x , y las ordenadas $x = 0$ y $x = 2$

$$A = 2u^2$$

28. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje x .

$$A = 8u^2$$

29. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^2 + 2x + 3$ el eje x , y las ordenadas $x = -1$ y $x = 1$

$$A = \frac{20}{3}u^2$$

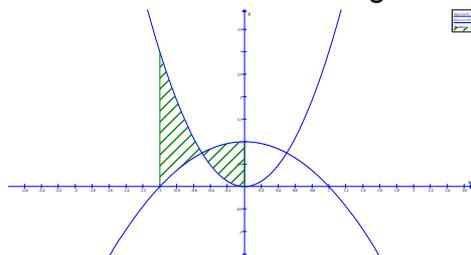
Área comprendida entre dos curvas

El área comprendida entre dos funciones es igual al área de la función mayor menos el área de la función menor.

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]$$

Ejemplo

Encuentre el área de la región entre las curvas $y = 3x^2$ y $y = 1 - x^2$ entre $x = -1$ y $x = 0$



Interceptos

$$3x^2 = 1 - x^2$$

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$3x^2 = 1 - x^2$$

$$x = \frac{-1}{2}$$

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} [3x^2 - (1 - x^2)] dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 [(1 - x^2) - 3x^2] dx =$$

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (4x^2 - 1) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 - 4x^2) dx =$$

$$\left[\frac{4x^3}{3} - x \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left[x - \frac{4x^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = 1 \quad \boxed{A = 1u^2}$$

Ejercicios

1. Calcular el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(1,4)$

$$\boxed{A = \frac{4}{3}u^2}$$

2. Calcular el área limitada por las parábolas $y^2 = 8x$ y $y = x^2$

$$\boxed{A = \frac{8}{3}u^2}$$

3. Calcular el área limitada por las curvas $y = x^2 + 2$, $y = -x$ y las ordenadas $x = -2$ y $x = 2$

$$\boxed{A = \frac{40}{3}u^2}$$

4. Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 6$ y la recta $y = 2x$

$$\boxed{A = \frac{125}{6}u^2}$$

5. Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$

$$\boxed{A = \frac{8}{3}u^2}$$

6. Calcular el área limitada por las curvas $3y = x^2$ y $y = -x^2 + 4x$

$$\boxed{A = 6u^2}$$

7. Calcular el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x$ y $y = -x^2 + 4x$

$$\boxed{A = 9u^2}$$

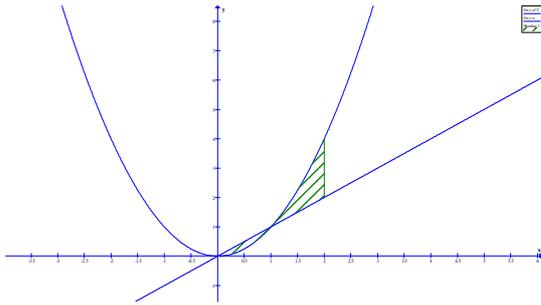
8. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 + 2$ y $y = 2x + 2$

$$\boxed{A = \frac{4}{3}u^2}$$

9. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 + 2$, $y = -x$ y las ordenadas $x = -2$ y $x = 2$

$$\boxed{A = \frac{40}{3}u^2}$$

10. Hallar el área de la figura limitada por: $y = x^2$, $y = x$ y las ordenadas $x = 0$ y $x = 2$



$$A = 1u^2$$

11. Calcular el área limitada por la parábola $y = 2 - x^2$ \wedge la recta $y = x$

$$A = \frac{9}{2}u^2$$

12. Calcular el área limitada por la parábola $y = 18 - x^2$ \wedge la curva $y = x^2$

$$A = 72u^2$$

13. Calcular el área limitada por las curvas $4y^2 - 2x = 0$ \wedge $4y^2 + 4x - 12 = 0$

$$A = 4u^2$$

14. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y^2 = 4x$ \wedge la recta $4x - 3y = 4$

$$A = \frac{125}{24}u^2$$

15. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x - 1$ \wedge $y^2 = 2x + 6$

$$A = 18u^2$$

16. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x - 1$ \wedge $x = 3 - y^2$

$$A = \frac{9}{2}u^2$$

17. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = -x + 2$ \wedge $y = x^2$

$$A = \frac{9}{2}u^2$$

18. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ \wedge $y = 2x - x^2$

$$A = \frac{1}{3}u^2$$

19. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = 5x - x^2$ \wedge $y = x$

$$A = \frac{32}{3}u^2$$

20. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x^4$ \wedge $y = 2x - x^2$

$$A = \frac{7}{15}u^2$$

21. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = 4x$ \wedge $y = 4x^2$

$$A = \frac{2}{3}u^2$$

22. Calcular el área de la región limitada por las curvas $x = \sqrt{y}$ \wedge $x = y$

$$A = \frac{1}{6}u^2$$

23. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x - 4$ \wedge $y = x^2 - 2$ \wedge las ordenadas $x = -1$ \wedge $x = 2$

$$A = \frac{15}{2}u^2$$

24. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 1$ \wedge $y = 4x - 4$

$$A = \frac{4}{3}u^2$$

25. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 + 2$ \wedge $y = -x$ \wedge las ordenadas $x = 0$ \wedge $x = 1$

$$A = \frac{17}{6}u^2$$

26. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y^2 = 4x$ \wedge $y = x^2$

$$A = \frac{4}{3}u^2$$

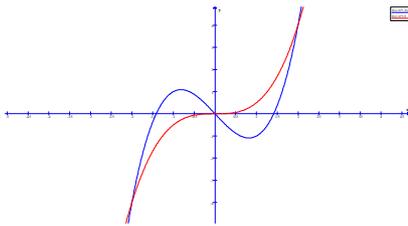
27. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x + 4$ \wedge $y = x^2 - 2$

$$A = \frac{125}{6}u^2$$

28. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = 2x^2 - 5x + 3$ \wedge $y = x + 3$

$$A = 9u^2$$

29. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x^3 - 2x$ \wedge $y = \frac{x^3}{2}$



$$A = 4u^2$$

30. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = 2x^2 + 2x - 1$ \wedge $y = 4x + 3$

$$A = 9u^2$$

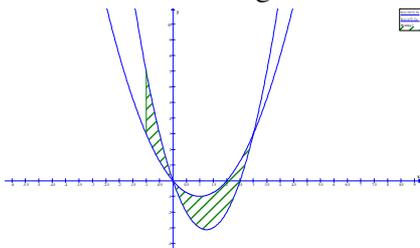
31. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 1$ \wedge $y = 1 - x^2$

$$A = \frac{8}{3}u^2$$

32. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 + 1$, $y = 4x - 3$ \wedge el eje y

$$A = \frac{8}{3}u^2$$

33. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = 2x^2 - 5x$, $y = x^2 - 2x$ \wedge $x = -1$



$$A = \frac{19}{3}u^2$$