# TRABAJO MECÁNICO (FUERZA VARIABLE. RESORTES)

En situaciones reales la fuerza no es constante, sino que varia cuando el objeto se mueve sobre una línea recta.

$w = fd$ $\Delta w = f(x)\Delta x$ $\boxed{w = \int_a^b f(x)dx}$

Si la fuerza se mide en lb. y la distancia en pies entonces $w = pies - lb$

Si la fuerza se mide en dinas y la distancia en cm. entonces $w = erg$ (ergios)

Si la fuerza se mide en Newton y la distancia en m. entonces $w = j$ (Joules)

1. Una partícula se mueve a lo largo del eje $x$ debido a la acción de una fuerza de $f(x)$ libras, cuando la partícula está a $x$ pies del origen. Si $f(x) = (2x+1)^2$ calcule el trabajo realizado conforme la partícula se mueve del punto donde $x = 1$ hasta el punto donde $x = 3$.

$$\boxed{\frac{158}{3}\, pie - libra}$$

**Aplicación en resortes.**

Ley de Hooke: la fuerza $f(x)$ necesaria para conservar estirado o comprimido un resorte $x$ unidades, de su longitud normal, está dada por

$f(x) = kx$ Donde $k$ es la constante de elasticidad del resorte.

2. Si la longitud normal de un resorte es 10 pulgadas y se requiere una fuerza de 3 libras para estirarlo 2 pulgadas, encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte desde su longitud normal hasta una distancia de 15 pulgadas. $\boxed{\frac{75}{4}\, pie - libra}$

3. Se necesita una fuerza de 8 libras para mantener estirado un resorte ½ pie más de su longitud normal. Encuentre el trabajo realizado al estirarlo ½ pie más de su longitud normal.

$$\boxed{2\, pie - libra}$$

4. Qué cantidad de trabajo se requiere para estirar 1 pie más, el resorte del problema anterior.

$$\boxed{8\, pie - libra}$$

5. Si la longitud natural de un resorte es 0.2 m. y se necesita una fuerza de 12 N para mantenerlo estirado 0.04 m. encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte desde su longitud natural hasta una longitud de 0.3 m. $\boxed{1.5J}$

6. Se necesita una fuerza de 0.6 N para mantener un resorte de longitud natural de 0.08 m. comprimido a una longitud de 0.07 m. Encuentre el trabajo realizado para comprimir el resorte de su longitud natural a la longitud de 0.06m.

$\boxed{0.012J}$

7. Se necesita una fuerza de 200 Dinas para mantener comprimido 8 cm. un resorte de 10 cm. Encuentre el trabajo realizado al comprimir el resorte 6 cm. A partir de su longitud natural.

$\boxed{450erg}$

8. La fuerza necesaria para estirar un resorte $s$ pies es $f = 11s$ lb. Qué trabajo se realiza para estirarlo 2 pies. $\boxed{22pie - libra}$

9. Se requiere una fuerza de 40N para sostener un resorte estirado desde su longitud natural de 10cm. Hasta una longitud de 15cm. Cuánto trabajo se realiza para estirarlo desde 15cm. Hasta 18cm.

$\boxed{1.56J}$

10. Un resorte tiene una longitud natural de 14cm. Si una fuerza de 500 dinas se requiere para mantenerlo estirado 2cm. Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte de su longitud natural hasta una longitud de 18cm.

$\boxed{2000erg}$

11. Un resorte tiene una longitud natural de 12cm. Una fuerza de 600 dinas lo comprime a 10cm. Determinar el trabajo realizado al comprimirlo de 12 a 9cm.

$\boxed{1350erg}$

## INTEGRALES IMPROPIAS

Al definir una integral $\int_a^b f(x)dx$, se trabaja con una función $f$ definida sobre un intervalo finito $[a,b]$ sin una discontinuidad infinita.

Ahora se extenderá el concepto de integral para el caso en que el intervalo es infinito o la función presenta una discontinuidad infinita en $[a,b]$. Ambos casos se conocen como integral impropia.

Tipo 1: <u>Intervalos infinitos</u>

a) si $\int_a^t f(x)dx$ existe para todo número $t \geq a$ entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$ , siempre que exista el límite como un número finito

b) si $\int_t^b f(x)dx$ existe para todo número $t \leq b$ entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$ , siempre que exista el límite como un número finito

Las integrales impropias son convergentes si el límite correspondiente existe y divergentes si el límite correspondiente no existe.

c) Si tanto $\int_a^{\infty} f(x)dx$ como $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ son convergentes entonces definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\int_c^t f(x)dx$$

Tipo 2: <u>Integrandos discontinuos</u>

Suponga que $f$ es una función continua definida en un intervalo $[a,b]$¨pero tiene una asíntota vertical.

a) si $f$ es continua sobre $[a,b]$ y es discontinua en <u>b</u> entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$ , si este límite existe como un número finito

b) si $f$ es continua sobre $[a,b]$ y es discontinua en <u>a</u> entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^a f(x)dx$$ , si este límite existe como un número finito

c) si $f$ tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$ y tanto

$\int_a^c f(x)dx$ , como $\int_c^b f(x)dx$ son convergentes entonces definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx$$

Ejemplo: Determinar si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes.

1. $\boxed{\int_4^5 \frac{dx}{(5-x)^{2/5}}}$ Tiene una asintota en $x = 5$

$$\lim_{t\to 5^-}\int_4^t \frac{dx}{(5-x)^{2/5}}$$

$$u = 5 - x$$
$$du = -dx$$

$$\lim_{t\to 5^-} -\int_4^t u^{\frac{-2}{5}}du$$

$$\int_4^5 \frac{dx}{(5-x)^{2/5}} = \left(\frac{-5u^{\frac{3}{5}}}{3}\right)_4^t = \frac{-5}{3}\left((5-t)^{\frac{3}{5}} - (5-4)^{\frac{3}{5}}\right) = \boxed{\frac{5}{3}} \text{ Convergente}$$

2. $\boxed{\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-9}}}$ Asintota en $x = 9$

$$\lim_{t\to 9^-} \int_1^t \frac{dx}{(x-9)^{1/3}} \qquad \begin{matrix} u = x-9 \\ du = dx \end{matrix} \qquad \lim_{t\to 9^-} \int_1^t u^{\frac{-1}{3}} du$$

$$\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-9}} = \left(\frac{3u^{\frac{2}{3}}}{2}\right)_1^t = \frac{3}{2}\left((t-9)^{\frac{2}{3}} - (1-9)^{\frac{2}{3}}\right) = \boxed{-6} \text{ Convergente}$$

3. $\boxed{\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2} dx}$ $\qquad \begin{matrix} u = -x^2 \\ du = -2xdx \end{matrix}$

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2} dx = \lim_{t\to -\infty} -\tfrac{1}{2}\int_t^{-1} e^u du = \left[-\tfrac{1}{2}e^u\right]_t^{-1} = \left[-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\right]_t^{-1} = -\tfrac{1}{2}\left[e^{-1} - e^{-t^2}\right] = \frac{-1}{2e} + \frac{1}{2e^{t^2}} = \boxed{\frac{-1}{2e}}$$

Convergente

4. $\int_2^\infty \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{dx}{x-1}$ $\qquad \begin{matrix} u = x-1 \\ du = dx \end{matrix}$

$$\lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{du}{u} = \ln|x-1|_2^t = \ln|t-1| - \ln|2-1| = \infty \text{ Divergente}$$

5. $\boxed{\int_0^2 \frac{dx}{4x-5}}$ Asintota en $x = \frac{5}{4}$

$$\lim_{t\to \frac{5}{4}^-} \int_0^t \frac{dx}{4x-5} + \lim_{t\to \frac{5}{4}^+} \int_t^2 \frac{dx}{4x-5} \qquad \begin{matrix} u = 4x-5 \\ du = 4dx \end{matrix}$$

$$\lim_{t\to \frac{5}{4}^-} \tfrac{1}{4}\int_0^t \frac{du}{u} + \lim_{t\to \frac{5}{4}^+} \tfrac{1}{4}\int_t^2 \frac{du}{u} =$$

$$\tfrac{1}{4}\ln|4x-5|_0^t = \tfrac{1}{4}\left[\ln|4t-5| - \ln|-5|\right] = \infty \text{ Divergente}$$

Por lo tanto no es necesario evaluar la segunda integral

Ejercicios

Para que valores de $p$ la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ es convergente

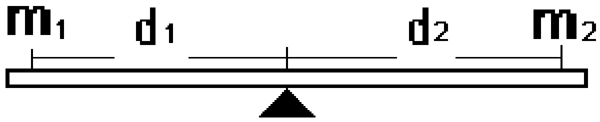
Determinar si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes.

| **Ejercicio** | **Respuesta** | **Ejercicio** | **Respuesta** | **Ejercicio** | **Respuesta** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ | D | 2. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$ | 1C | 3. $\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$ | $\frac{1}{2}$ C |
| 4. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2x-1)^3}$ | $\frac{1}{4}$ C | 5. $\int_3^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{9+x^2}}$ | D | 6. $\int_0^{\infty} xe^{-5x} dx$ | $\frac{1}{25}$ C |
| 7. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx$ | D | 8. $\int_{-\infty}^{0} xe^{x} dx$ | $-1$C | 9. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln\lvert x\rvert}$ | D |
| 10. $\int_{-\infty}^{1} xe^{2x} dx$ | $\frac{1}{4}e^2$ C | 11. $\int_4^{\infty} xe^{-x^2} dx$ | $\frac{1}{2e^{16}}$ C | 12. $\int_{-\infty}^{0} x^2e^{x} dx$ | 2C |
| 13. $\int_0^{\infty} senxdx$ | D | 14. $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ | D | 15. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ | 1C |
| 16. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$ | $\frac{\pi}{2}$ C | 17. $\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x} dx$ | $-\frac{1}{e}$ C | 18. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ | $\frac{\pi}{2}$ C |
| 19. $\int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx$ | $\frac{1}{2}$ C | 20. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ | $\frac{5}{2}$ C | 21. $\int_1^{\infty} \frac{4}{\sqrt[4]{x}} dx$ | D |
| 22. $\int_0^{\infty} xe^{-x/2} dx$ | 4C | 23. $\int_0^{\infty} sen\frac{x}{2} dx$ | D | 24. $\int_{-\infty}^{-5} \frac{1}{x^4} dx$ | $\frac{1}{375}$ C |
| 25. $\int_1^{\infty} 2xe^{-x^2} dx$ | $\frac{1}{e}$ C | 26. $\int_{-\infty}^{1} e^{4x} dx$ | $\frac{1}{4}e^4$ C | 27. $\int_9^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ | D |
| 28 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ | $\frac{1}{4}$ C | 29. $\int_e^{\infty} \frac{\ln\lvert x\rvert}{x} dx$ | D | 30 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ | $\pi$C |
| 31. $\int_2^{5} \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ | $2\sqrt{3}$ C | 32. $\int_0^{3} \frac{dx}{x-1}$ | D | 33 $\int_4^{5} \frac{1}{(5-x)^{2/3}} dx$ | 3C |
| 34. $\int_0^{1} \ln\lvert x\rvert dx$ | $-1$C | 35. $\int_0^{1} x\ln\lvert x\rvert dx$ | $\frac{-1}{4}$ C | 36. $\int_0^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ | $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ C |
| 37. $\int_1^{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x-9}} dx$ | $-6$C | 38. $\int_0^{4} \frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}$ | 4C | 39 $\int_{-2}^{7} \frac{1}{(x+1)^{2/3}} dx$ | 9C |
| 40. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ | $\frac{\pi}{2}$ C | 41. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ | $\frac{32}{3}$ C | 42. $\int_0^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$ | $3+3\sqrt[3]{2}$ C |
| 43. $\int_0^{4} \frac{1}{(x-3)^2} dx$ | D | 44. $\int_{-5}^{-3} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$ | $-4$C | 45. $\int_2^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ | $\frac{\pi}{3}$ C |
| 46. $\int_{-2}^{0} \frac{dw}{(w+1)^{1/3}}$ | 3C | 47. $\int_0^{2} \frac{1}{4-x^2} dx$ | D | 48. $\int_1^{3} \frac{2}{(x-2)^{8/3}} dx$ | D |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 49. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ | $\frac{3}{2}$ C | 50. $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^{1/3}}dx$ | $\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ C | 51. $\int_3^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$ | $2\sqrt{7}$ C |
| 52. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{\pi}{2}$ C | 53 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ | $\frac{3}{4}$ C | 54 $\int_{-4}^0 \frac{x}{16-2x^2}dx$ | D |
| 55 $\int_0^3 \frac{1}{x^2+x-2}dx$ | D | 56. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ | 2 C | 57. $\int_{-4}^1 \frac{1}{(z+3)^3}dz$ | D |
| 58. $\int_0^8 (x-8)^{-2/3}dx$ | 6 C | 59. $\int_0^1 x^{-2/3}dx$ | 3 C | 60. $\int_0^1 e^{-x}dx$ | $1-\frac{1}{e}$ C |

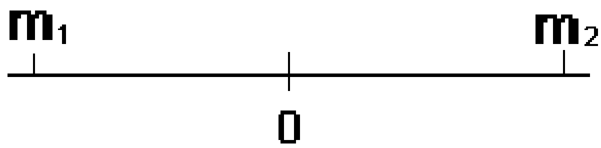
## MOMENTOS Y CENTROS DE MASA

Dos masas $m_1$ y $m_2$ se colocan en lados opuestos de una barra a distancias $d_1$ y $d_2$. La barra se equilibra si y sólo si $d_1m_1 = d_2m_2$




Equilibrio $d_1m_1 = d_2m_2$

Si se representa en un eje coordenado con su origen en el fulcro la condición de equilibrio será $-m_1x_1 = m_2x_2$




Equilibrio $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$

El producto de la masa $m$ de una partícula por su distancia dirigida desde un punto (brazo de palanca) se denomina momento de la partícula respecto a ese punto. Mide la tendencia de la masa a producir una rotación alrededor de ese punto.

En un sistema de $n$ masas $M = x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots + x_nm_n = \sum_{i=1}^{n} x_im_i$ La condición para el equilibrio es que $M = 0$. El equilibrio no tiene que ser en el origen, la pregunta es dónde se equilibra el sistema. Entonces $\overline{x}$ es la coordenada deseada. Es el punto de equilibrio

$$(x_1 - \overline{x})m_1 + (x_2 - \overline{x})m_2 + \cdots + (x_n - \overline{x})m_n = 0$$

$m_i\overline{x} = x_im_i$ $\boxed{\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_im_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$ Punto de equilibrio

1. En los puntos 0, 1, 2, y 4 a lo largo del eje $x$, hay masas de 4, 2, 6 y 7 kilogramos respectivamente, encuentre el centro de masa. $\boxed{\bar{x} = 2.21}$

2. Partículas de $m_1 = 5$ $m_2 = 7$ y $m_3 = 9$ están ubicadas en $x_1 = 2$ $x_2 = -2$ y $x_3 = 1$ a lo largo de una recta. ¿Encuentre el centro de masa? $\boxed{\bar{x} = \frac{5}{21}}$

3. Juan y María pesan 180 y 110 libras respectivamente, se sientan en extremos opuestos de un sube y baja de 12 pies de largo, con el fulcro a la mitad. ¿En dónde debe sentarse su hijo Tom de 80 libras para que se equilibre el sube y baja?

$\boxed{\bar{x} = 11.25\, pies \text{ de Juan} \quad \text{o} \quad \bar{x} = 0.75\, pies \text{ de María}}$

4. Partículas de $m_1 = 6$ $m_2 = 3$ y $m_3 = 5$ están ubicadas en $x_1 = -5$ $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$ a lo largo de una recta. ¿Encuentre el centro de masa? $\boxed{\bar{x} = \frac{-6}{7}}$

5. Partículas de $m_1 = 12$ $m_2 = 1$ $m_3 = 6$ $m_4 = 3$ y $m_5 = 11$ están ubicadas en $x_1 = -6$ $x_2 = -4$ $x_3 = -2$ $x_4 = 0$ y $x_5 = 8$ a lo largo de una recta. ¿Encuentre el centro de masa? $\boxed{\bar{x} = 0}$

CENTROIDES

El centro de masa (centro de gravedad) de una lámina (homogénea) está en el centro geométrico. Entonces para hallar las coordenadas del centro de masa utilizamos las formulas:

$$\bar{X} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{Y} = \frac{M_x}{m} \qquad \text{Donde} \quad m = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$M_y = \delta \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx \qquad M_x = \frac{\delta}{2}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{X} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]dx}} \qquad \boxed{\bar{Y} = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]dx}}$$

1. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = x^3 \wedge y = \sqrt{x}$

$\boxed{\left(\frac{12}{25}, \frac{3}{7}\right)}$

2. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = 2 - x$, $y = 0$ $x = 0$

$\boxed{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}$

3. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = 2 - x^2$, $y = 0$

$$\boxed{\left(0,\frac{4}{5}\right)}$$

4. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y=\dfrac{x^2}{3}$, $y=0$ $x=4$

$$\boxed{\left(3,\frac{8}{5}\right)}$$

5. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y=x^3$, $y=0$ $x=1$

$$\boxed{\left(\frac{4}{5},\frac{2}{7}\right)}$$

6. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y=\dfrac{1}{2}(x^2-10)$, $y=0$, entre $x=-2 \wedge x=2$

$$\boxed{\left(0,-\frac{287}{130}\right)}$$

7. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y=2x-4$, $y=2\sqrt{x}$, $x=1$

$$\boxed{\left(\frac{192}{95},\frac{27}{19}\right)}$$

8. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y=\dfrac{1}{2}x^2$, $y=0$, $x=2$

$$\boxed{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{5}\right)}$$

9. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y=\sqrt{x}$, $y=x$

$$\boxed{\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)}$$

10. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y=\sqrt{x}+1$, $y=\dfrac{1}{3}x+1$

$$\boxed{\left(\frac{18}{5},-\frac{5}{2}\right)}$$

11. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $x=2y-y^2$, $x=0$

$$\boxed{\left(\frac{2}{5},1\right)}$$

12. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $x=y+2$, $x=y^2$

$$\boxed{\left(\frac{8}{5},-\frac{1}{2}\right)}$$