

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una variable es una letra que representa cualquier número de un conjunto dado de números. Al combinar letras con números y realizar las cuatro operaciones básicas, la potenciación y la radicación obtenemos las expresiones algebraicas. Algunas de ellas son:

$$3x^2 + 6x - 4$$

$$\sqrt{3x} + 14$$

$$\frac{y^2 - 3y}{y - 1}$$

Polinomios: Un polinomio en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$ entonces el polinomio es de grado n .

Término. Es la expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios no separados entre sí por el signo $+ o -$. Así, x , $6b$, $-3xy$, $\frac{5a}{7b}$, $-\sqrt[5]{x^2}$ son términos.

Las partes de un término son cuatro: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado.

Las expresiones algebraicas se clasifican en monomios y polinomios.

Monomio, es la expresión algebraica que consta de un solo término

Polinomio, es la expresión algebraica que consta de más de un término.

Adición y sustracción de polinomios.

Se pueden sumar y restar polinomios aplicando las propiedades de los números reales, teniendo en cuenta que sólo se pueden combinar términos con la misma variable elevada a la misma potencia utilizando la propiedad distributiva. Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{a) } (5x^2 + 2x + 3) + (7x^3 - x^2 + 5x - 1) &= 5x^2 + 2x + 3 + 7x^3 - x^2 + 5x - 1 \\ &= 7x^3 + 4x^2 + 7x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (5x^2 + 2x + 3) - (7x^3 - x^2 + 5x - 1) &= 5x^2 + 2x + 3 - 7x^3 + x^2 - 5x + 1 \\ &= -7x^3 + 6x^2 - 3x + 4 \end{aligned}$$

Ejercicios.

1. Dados los polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 2$, $R(x) = x + 1$ y $Q(x) = 2x^3 - 1$. Calcular:

- $P(x) + Q(x)$ (Sol: $2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$)
- $P(x) - Q(x)$ (Sol: $-2x^3 + 5x^2 - 3x + 3$)
- $P(x) - R(x)$ (Sol: $5x^2 - 4x + 1$)
- $R(x) - Q(x)$ (Sol: $-2x^3 + x + 2$)

2. Efectuar las operaciones indicadas:

- a. $(a-b)-(b+c-d)+(2b-a)$ (Sol: $d-c$)
 b. $x+[(y-x)-(y-z)]$ (Sol: z)
 c. $a^2-(b^2-c^2)+b^2-(a^2+c^2)-c^2-(a^2-b^2)$ (Sol: $-a^2+b^2-c^2$)
 d. $(a+2b-6a)-[3b-(6a-6b)]$ (Sol: $a-7b$)
 e. $(x+y-z)-(x-y+z)+(-x+y+z)-(-x-y+z)$ (Sol: $4y-2z$)
 f. $(4x^3-2x^2+x+1)-(3x^3-x^2-x-7)-(-x^3-4x^2+2x+8)$ (Sol: $2x^3+3x^2$)

3. Dados los polinomios $P(x) = -7x^4 + 6x^2 + 6x + 5$, $Q(x) = -2x^2 + 2 + 3x^5$ y $R(x) = x^3 - x^5 + 3x^2$ calcular:

- a. $P(x) + Q(x)$ (Sol: $3x^5 - 7x^4 + 4x^2 + 6x + 7$)
 b. $P(x) - Q(x)$ (Sol: $-3x^5 - 7x^4 + 8x^2 + 6x + 3$)
 c. $P(x) + Q(x) + R(x)$ (Sol: $2x^5 - 7x^4 + x^3 + 7x^2 + 6x + 7$)
 d. $P(x) - Q(x) - R(x)$ (Sol: $-2x^5 - 7x^4 - x^3 + 5x^2 + 6x + 3$)
 e. $R(x) + P(x) - Q(x)$ (Sol: $-4x^5 - 7x^4 + x^3 + 11x^2 + 6x + 3$)
 f. $P(x) - R(x) + Q(x)$ (Sol: $4x^5 - 7x^4 - x^3 + x^2 + 6x + 7$)

4. Dados los polinomios $P(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x$ $Q(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$ $R(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}x$

calcular:

- a. $P(x) + Q(x)$ (Sol: $\frac{11}{6}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{3}{4}$)
 b. $P(x) - Q(x)$ (Sol: $\frac{7}{6}x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{3}{4}$)
 c. $P(x) + Q(x) + R(x)$ (Sol: $\frac{13}{6}x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{3}{4}$)
 d. $P(x) - Q(x) - R(x)$ (Sol: $-\frac{4}{3}x^2 + x - \frac{3}{4}$)
 e. $R(x) + P(x) - Q(x)$ (Sol: $\frac{11}{3}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{3}{4}$)
 f. $P(x) - R(x) + Q(x)$ (Sol: $-\frac{2}{3}x^2 + x + \frac{3}{4}$)

Producto de expresiones algebraicas.

Para hallar el producto de expresiones algebraicas se utiliza la propiedad distributiva de forma repetida, multiplicando primero los signos, luego los coeficientes y finalmente la parte literal teniendo en cuenta las propiedades de los exponentes. Ejemplo:

$$(2x^2 - 2x)(5x^2 + 3x) = 10x^4 + 6x^3 - 10x^3 - 6x^2 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= 10x^4 - 4x^3 - 6x^2 \quad \text{Agrupación de términos semejantes}$$

Ejercicios.

1. Realizar los siguientes productos.

- a. $(a+b) \cdot (a+b)$ (Sol: $a^2 + 2ab + b^2$)
- b. $(a+b) \cdot (a-b)$ (Sol: $a^2 - b^2$)
- c. $(a+b+c) \cdot (a+b-c)$ (Sol: $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$)
- d. $(a+b-c) \cdot (a-b+c)$ (Sol: $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$)
- e. $(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c)$ (Sol: $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$)
- f. $(x-a) \cdot (x-b) + (x-c) \cdot (x-d)$ (Sol: $2x^2 - (a+b+c+d)x + ab + cd$)
- g. $(a+b) \cdot (b+c) - (c+d) \cdot (d+a)$ (Sol: $b^2 - d^2 + ab + bc - cd - da$)
- h. $(a+b)x + (b+c)y - [(a-b)x - (b-c)y]$ (Sol: $2bx + 2by$)
- i. $(a+b-c) \cdot (a+b) + (a-b+c) \cdot (a+c)$ (Sol: $2a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc + ca$)
- j. $(a-b) \cdot (a+b-c) + (b-c)(b+c-a)$ (Sol: $a^2 - c^2 - ab + bc$)