DIVISIÓN DE POLINOMIOS

La división de polinomios es similar al proceso de dividir números.

División larga de polinomios.

Ejemplo: Dividir $6x^4+5x^3-7x^2+3x+2$ entre $2x^2+3x-1$

$$\begin{array}{r|l}
6x^4+5x^3-7x^2+3x+2 & \underline{2x^2+3x-1} \\
\underline{-6x^4-9x^3+3x^2} \qquad\qquad & 3x^2-2x+1 \\
-4x^3-4x^2+3x+2 & \\
\underline{+4x^3+6x^2-2x\quad} & \\
+2x^2+1x+2 & \\
\underline{-2x^2-3x+1} & \\
-2x+3 &
\end{array}$$

Por tanto: $D(x)=3x^2-2x+1$ y $R(x)=-2x+3$

Entonces $P(x)$ se puede expresar como: $P(x)=\left(2x^2+3x-1\right)\left(3x^2-2x+1\right)+(-2x+3)$

Algoritmo de la división.
Si $P(x)$ *y* $Q(x)$ son polinomios con $D(x)\neq 0$, entonces existen polinomios únicos $Q(x)$ *y* $R(x)$ donde $R(x)$ ***es 0 o de grado menor que el grado de*** $D(x)$ ***tal que:***

$$P(x)=D(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

Los polinomios $P(x)$ *y* $D(x)$ se llaman dividendo y divisor, respectivamente, $Q(x)$ *y* $R(x)$ son el cociente y el residuo.

División sintética.

Es un método rápido para dividir polinomios: se puede usar cuando el divisor está en la forma $x-c$.

Ejemplo: Dividir $2x^3+3x^2-4$ entre $x+1$

Se deben colocar todos los grados de la x, quedando de la siguiente forma
$2x^3+3x^2+0x-4$ entre $x-(-1)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & 0 & -4 \\
-1 & & -2 & -1 & 1 \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & -3
\end{array}$$

Por tanto: $D(x)=2x^2+x-1$ y $R(x)=-3$

Entonces $P(x)$ se puede expresar como: $P(x)=\left(2x^2+x-1\right)(x+1)-3$

Encontrar el cociente y el residuo de las siguientes divisiones

1. $x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x - 4 \div x^2 + x + 2$ Rta: $D(x) = x^2 - 7x + 7$ $R(x) = 10x - 18$
2. $x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6 \div x^2 - x + 2$ Rta: $D(x) = x^2 - 4x + 5$ $R(x) = x - 4$
3. $2x^3 - 3x^2 - 2x \div 2x - 3$ Rta: $D(x) = x^2$ $R(x) = -2x$
4. $4x^3 + 7x + 9 \div 2x + 1$ Rta: $D(x) = 2x^2 - x + 4$ $R(x) = 5$
5. $6x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 14 \div 2x^2 - 3x + 7$ Rta: $D(x) = 3x^2 + 4x - 2$ $R(x) = -31x$
6. $x^3 + 4x^2 - 6x + 1 \div x - 1$ Rta: $D(x) = x^2 + 5x - 1$ $R(x) = 0$
7. $3x^2 + 5x - 4 \div x + 3$ Rta: $D(x) = 3x - 4$ $R(x) = 8$
8. $x^4 - x^3 + 4x + 2 \div x^2 + 3$ Rta: $D(x) = x^2 - x - 3$ $R(x) = 7x + 11$
9. $2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - x - 3 \div x^2 - 2$ Rta: $D(x) = 2x^3 + 4x^2 + 8$ $R(x) = -x + 13$
10. $4x^2 - 3x - 7 \div 2x - 1$ Rta: $D(x) = 2x - 1/2$ $R(x) = -15/2$
11. $6x^3 + x^2 - 12x + 5 \div 3x - 4$ Rta: $D(x) = 2x^2 + 3x$ $R(x) = 5$
12. $x^3 - 27 \div x - 3$ Rta: $D(x) = x^2 + 3x + 9$ $R(x) = x - 3$
13. $x^4 - 16 \div x + 2$ Rta: $D(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ $R(x) = 0$
14. $\dfrac{2x^4 - x^3 + 9x^2}{x^3 + 4}$ Rta: $D(x) = 2x - 1$ $R(x) = 9x^2 - 8x + 4x$
15. $\dfrac{x^5 + 3x^3 - 6}{x - 1}$ Rta: $D(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 4$ $R(x) = -2$
16. $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x - 3}$ Rta: $D(x) = x^2 - 6x + 9$ $R(x) = 0$
17. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x - 1/2}$ Rta: $D(x) = 2x^2 + 4x$ $R(x) = 1$
18. $\dfrac{6x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x + 1}{x + 2/3}$ Rta: $D(x) = 6x^3 + 6x^2 + x + 1/3$ $R(x) = 7/9$
19. $\dfrac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 3}{2x + 1}$ Rta: $D(x) = 2x^2 - 1$ $R(x) = -2$
20. $\dfrac{x^3 + 6x + 3}{x^2 - 2x + 2}$ Rta: $D(x) = x + 2$ $R(x) = 8x - 1$
21. $\dfrac{6x^3 + 2x^2 + 22x}{2x^2 + 5}$ Rta: $D(x) = 3x + 1$ $R(x) = 1$

Teorema del residuo y del factor.

Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x-c$, entonces el residuo es el valor $P(c)$

Esta expresión resultará muy útil para calcular el residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre $x-a$, sin efectuar la división, algo que será muy útil en situaciones como esta:

$\dfrac{x^{99}+1}{x-1}$ entonces $R(x)=P(1)=1^{99}+1=1+1=2$ el residuo de esta división es 2

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $\dfrac{5x^4-3x^2+6x-1}{x-1}$	7	2) $\dfrac{x^6+64}{x-2}$	128	3) $\dfrac{x^4-16}{x+2}$	0
4) $\dfrac{3x^6+3x-2}{x+2}$	196	5) $\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$	0	6) $\dfrac{x^3-2x^2-3}{x-1}$	-4
7) $\dfrac{2x^4-2x^3+3x^2+5x+10}{x+2}$	60	8) $\dfrac{a^3-1}{a-1}$	0	9) $\dfrac{x^4-3x^3+4}{x+2}$	44

Teorema del factor

c es un cero de P sí y sólo sí $x-c$ es un factor de $P(x)$

En otras palabras, para saber si $P(x)$ es divisible entre $x-c$, basta con comprobar que $P(c)=0$. A este resultado se le llama Teorema del Factor

Ejemplo:

Sea $P(x)=x^3-x^2-4x+4$. Muestre que $P(1)=0$ y utilice este hecho para factorizar $P(x)$ por completo.

$P(1)=(1)^3-(1)^2-4(1)+4=0$

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x^2-4)(x-1)=(x+2)(x-2)(x-1)$$

Entonces $x^3-x^2-4x+4=(x+2)(x-2)(x-1)$

Teorema de las raíces racionales

Si a/b es un número racional en sus términos más simples, y además una raíz de la función polinomial

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

En donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son enteros, y $a_n \neq 0$. Entonces, a es un factor entero del término constante a_0 y b es un factor entero del primer coeficiente a_n.

Factorizar completamente $P(x)$.

1) $P(x)=12x^3-8x^2-3x+2$ Rta: $(2x-1)(3x-2)(2x+1)$

2) $P(x)=x^3-6x^2-x+6$ Rta: $(x-1)(x-6)(x+1)$

3) $P(x)=3x^4-x^3-21x^2-11x+6$ Rta: $(x-3)(x+2)(x+1)(3x-1)$

4) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ Rta: $(x-1)(x-3)(x-3)$

5) $P(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$ Rta: $(x+3)(x+2)(x+1)(x-2)$

6) $P(x) = x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80$ Rta: $(x-5)(x+4)(x-4)(x-1)$

7) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ Rta: $(x-2)(x+2)(x+3)$

8) $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$ Rta: $(x+2)(3x-1)(2x-1)$

9) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 5x - 2$ Rta: $(x-1)(x+1)(x-2)(2x-1)$

10) $P(x) = x^3 - x^2 - 11x + 15$ Rta: $(x-3)(x+1+\sqrt{6})(x+1-\sqrt{6})$

Encuentre un polinomio de grado especificado que tenga los ceros dados:

1) Grado 3, ceros -1,1,3 Rta: $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

2) Grado 4, ceros -2,0,2,4 Rta: $P(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x$

3) Grado 4, ceros -1,1,3,5 Rta: $P(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$

4) Grado 4, ceros -3,0,1,5 Rta: $P(x) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x$