ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Ejemplo:

$$3x + 2 = 5x \qquad x^2 - 2x = 10 \qquad 5 = \sqrt{x}$$

El objetivo es determinar el valor de la incógnita (Variable) x para la cual se cumple la igualdad. Los valores de la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera se llaman raíces o soluciones de la ecuación y el proceso para hallarlas se denomina solución de una ecuación.

Ecuaciones lineales.
Son ecuaciones de primer grado de la forma $ax + b = 0$ donde a y b son números reales y x es la incógnita.

Ejemplo: Solución de una ecuación lineal: Resolver la ecuación $5x + 8 = x$

La ecuación se resuelve agrupando los términos con la incógnita a un lado y los coeficientes al otro lado de la igualdad mediante transposición de términos.

$5x + 8 = x$	
$5x + 8 - 8 = x - 8$	Axioma de igualdad
$5x = x - 8$	Agrupación de términos semejantes
$5x - x = x - 8 - x$	Axioma de igualdad
$4x = -8$	Agrupación de términos semejantes
$\frac{4x}{4} = -\frac{8}{4}$	Axioma de igualdad
$x = -2$	Simplificando

Para comprobar la solución, se reemplaza el valor de la incógnita en la ecuación original.

$$5(-2) + 8 = (-2)$$
$$-10 + 8 = -2$$
$$-2 = -2$$

Como la ecuación es verdadera la raíz o solución de la ecuación es: $\boxed{x = -2}$

Ejercicios: hallar el valor de la incógnita para las siguientes ecuaciones.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $7x + 2 = 5x - 2$	$x = -2$	2) $x - 3 = 5x + 6$	$x = -9/4$	3) $3x + 8 = 29$	$x = 7$
4) $5 = 2x + 6$	$x = -1/2$	5) $5y + 4 = 6y + 4$	$y = 0$	6) $3m + 2 = 4m - 2$	$m = 4$
7) $2l + 32 = 5l + 32$	$l = 0$	8) $3z + 5 = 5z + 12$	$z = -7/2$	9) $\sqrt{x} = 4$	$x = 16$
10) $\sqrt{x} + 5 = 8$	$x = 9$	11) $7t - 2t = 6 + 1$	$t = 7/5$	12) $2(x + 1) = 6x$	$x = 1/2$

13) $3x+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}x-5$	$x=-\frac{34}{15}$	14) $x+\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{7}$	15) $5x+9=\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}$	$x=-\frac{123}{65}$
16) $\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}=-x+\frac{1}{6}$	$x=\frac{41}{42}$	17) $\frac{2}{x}+5=\frac{2}{3}$	$x=-\frac{6}{13}$	18) $\frac{1}{x}=\frac{4}{3x}+1$	$x=-\frac{1}{3}$
19) $3+\frac{2}{x}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4x}$	$x=-\frac{2}{3}$	20) $\frac{3}{x}=\frac{5}{4}-\frac{3}{4x}$	$x=3$	21) $\frac{3}{x+1}=2$	$x=\frac{1}{2}$
22) $\frac{2}{x-1}=\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{4}$	$x=7$	23) $\frac{t}{4}=\frac{2}{5}t+6$	$t=-40$	24) $\frac{3x+2}{x-7}=\frac{3}{4}$	$x=-\frac{29}{9}$

Determinar una variable en términos de las otras.

Determinar la variable *f* en términos de las otras variables.

$x=\frac{3fm}{v^2}$

Por transposición de términos $f=\frac{xv^2}{3m}$

Resuelva la ecuación para la variable indicada. Ejercicios tomados de Precálculo de Steward 5° edición.

1) $PV=nRT$ para R 2) $F=G\frac{mM}{r^2}$ para m 3) $P=2l+2w$ para w

4) $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ para R_1 5) $\frac{ax+b}{cx+d}=2$ para x 6) $a-2|b-3(c-x)|=6x$ para x

7) $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ para r 8) $F=G\frac{mM}{r^2}$ para r 9) $a^2x+(a-1)=(a+1)x$ para x

10) $a^2+b^2=c^2$ para b 11) $A=P\left(1+\frac{i}{100}\right)^2$ para i 12) $\frac{a+1}{b}=\frac{a-1}{b}+\frac{b+1}{a}$ para a

13) $S=\frac{n(n+1)}{2}$ para n 14) $h=\frac{1}{2}gt^2+v_0t$ para t

Ecuaciones cuadráticas.

Son ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$ donde a y b son números reales y $a\neq 0$.

La mayoría de las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver mediante factorización.

Propiedad del producto nulo.

$AB=0 \quad \Leftrightarrow \quad A=0 \ \wedge \ B=0$

Ejemplo: Solución de una ecuación cuadrática. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $x^2+3x=-2$
b) $x^2-25=0$

a) $x^2+3x+2=0$ — Igualando a cero

$(x+1)(x+2)=0$ — Factorizando

$(x+1)=0$ $\quad$ $(x+2)=0$ — Propiedad del producto nulo

$\boxed{x=-1}$ $\quad$ $\boxed{x=-2}$ — Solución

b) $x^2-25=0$

$x^2=25$ — Despejando la incógnita

$\sqrt{x^2}=\pm\sqrt{25}$ — Axioma de igualdad

$\boxed{x=-5}$ $\quad$ $\boxed{x=5}$ — Solución

El discriminante.

El discriminante de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ es $D=b^2-4ac$

1) Si $b^2-4ac>0$ la ecuación tiene dos soluciones reales distintas
2) Si $b^2-4ac=0$ la ecuación tiene exactamente una solución real
3) Si $b^2-4ac<0$ la ecuación no tiene solución real

Ejemplo: Utilice el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tienen las siguientes ecuaciones.

a) $x^2+3x+2=0$
b) $4x^2+12x+9=0$
c) $x^2+x+1=0$

a) El discrimínate es $3^2-4(1)(2)>0$ entonces la ecuación tiene dos raíces distintas.
b) El discrimínate es $12^2-4(4)(9)=0$ entonces la ecuación tiene una raíz.
c) El discrimínate es $1^2-4(1)(1)<0$ entonces la ecuación no tiene solución real.

Encuentre las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $x^2+2x-5=0$	$x=-1\pm\sqrt{6}$	2) $x^2-4x+2=0$	$x=2\pm\sqrt{2}$
3) $2x^2+8x+1=0$	$x=-4\pm\sqrt{14}$	4) $9x^2+6x+10=0$	No tiene solución real
5) $2x^2+5x-12=0$	$x=3/2 \ \wedge \ x=-4$	6) $3y^2+6y-9=0$	$x=1 \ \wedge \ x=-3$
7) $9x^2-4=0$	$x=\pm 2/3$	8) $m^2+8m=48$	$x=4 \ \wedge \ x=-12$
9) $y^2+6y=16$	$x=2 \ \wedge \ x=-8$	10) $2x^2+3x-5=0$	$x=1 \ \wedge \ x=-5/2$
11) $-5x^2+13x+6=0$	$x=3 \ \wedge \ x=-2/5$	12) $6x-x^2=9$	$x=3$

13) $7x^2+7x-84=0$	$x=3 \wedge x=-4$	14) $7x^2+21x-28=0$	$x=1 \wedge x=-4$
15) $-x^2+4x-7=0$	No tiene solución real	16) $12x^2-3x=0$	$x=0 \wedge x=\frac{1}{4}$
17) $4x^2-16=0$	$x=\pm 2$	18) $\frac{3}{x}=1+\frac{x-13}{6}$	$x=\frac{-7\pm 3\sqrt{13}}{-2}$
19) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}=\frac{5}{4}$	$x=2 \wedge x=-\frac{7}{5}$	20) $\frac{x^2}{x+100}=50$	$x=100 \wedge x=-50$
21) $x-\frac{4}{x}=3$	$x=4 \wedge x=-1$	22) $x+\frac{1}{x}=2$	$x=1$
23) $\frac{x}{2x+7}-\frac{x+1}{x+3}=1$	$x=-\frac{7}{3} \wedge x=-4$	24) $2x=1-\sqrt{2-x}$	$x=1 \wedge x=-\frac{1}{4}$

Ecuaciones con valor absoluto.

Ejemplo: Solución de una ecuación con valor absoluto. Resolver la siguiente ecuación.

$|2x-5|=3$

Equivale a

$$-3=2x-5=3$$
$$-3+5=2x=3+5$$
$$\frac{2}{2}=x=\frac{8}{2}$$

Solución

$\boxed{x=1}$ $\boxed{x=4}$

Encuentre todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones con valor ebsoluto

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1) $\lvert 2x\rvert=3$	$x=-\frac{3}{2} \wedge x=\frac{3}{2}$	2) $\lvert 4x\rvert=2$	$x=-\frac{1}{2} \wedge x=\frac{1}{2}$
3) $\lvert 8x\rvert=3$	$x=-\frac{3}{8} \wedge x=\frac{3}{8}$	4) $\lvert 6x+1\rvert=4$	$x=-\frac{5}{6} \wedge x=\frac{1}{2}$
5) $\lvert 3x+5\rvert=1$	$x=-2 \wedge x=-\frac{4}{3}$	6) $\lvert x-4\rvert=8$	$x=-4 \wedge x=12$
7) $\lvert x-6\rvert=-1$	$x=5 \wedge x=7$	8) $2\lvert x-2\rvert-1=2$	$x=\frac{1}{2} \wedge x=\frac{7}{2}$
9) $\lvert 2x+1\rvert-3=8$	$x=-6 \wedge x=5$	10) $\lvert x+2\rvert=7x-10$	$x=1 \wedge x=2$
11) $\left\lvert\frac{x+1}{2}\right\rvert=3$	$x=-7 \wedge x=5$	12) $\left\lvert\frac{x}{2}+1\right\rvert=4$	$x=-10 \wedge x=6$
13) $\left\lvert\frac{x-2}{2}\right\rvert=6$	$x=-10 \wedge x=14$	14) $\left\lvert\frac{x}{3}\right\rvert=9$	$x=-27 \wedge x=27$
15) $\left\lvert\frac{x}{2}+3\right\rvert=3$	$x=-12 \wedge x=0$	16) $\lvert x^2-5\rvert=4$	$x=-1, x=1, x=-3 \wedge x=3$