SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que contiene las mismas variables. La solución son los valores de las variables para los cuales el sistema se cumple. Resolver un sistema es encontrar todas las soluciones del sistema.

<u>Ejemplo2:</u> Resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 10 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$$

Este sistema se puede resolver por los métodos de sustitución, igualación o eliminación. Para resolverlo vamos a utilizar los tres métodos.

Método de sustitución.

$y = 5 - 2x$ Despejamos y de la segunda ecuación, luego la sustituimos en la primera

$3x + 4(5 - 2x) = 10$ Tenemos una ecuación con una variable

$3x + 20 - 8x = 10$

$-5x = 10 - 20$ Por agrupación de términos semejantes

$x = \dfrac{-10}{-5}$ Por transposición de términos

$\boxed{x = 2}$ Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones iníciales, obtenemos

$\boxed{y = 1}$

Método de igualación.

$y = 5 - 2x$ $y = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{4}x$ Despejamos y de las dos ecuaciones

$5 - 2x = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{4}x$ Igualándolas tenemos una ecuación con una variable

$5 - \dfrac{5}{2} = 2x - \dfrac{3}{4}x$ Variables a un lado y coeficientes al otro

$\dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{4}x$ Agrupando términos semejantes

$\boxed{x = 2}$ Por transposición de términos

$\boxed{y = 1}$

Método de eliminación.

$3x+4y=10$
$-4(2x+y=5)$ Multiplicando la segunda ecuación por -4

$3x+4y=10$
$-8x-4y=-20$ Sumando las dos ecuaciones
$-5x \quad =-10$

$-5x=-10$ Tenemos una ecuación con una variable

$x=\frac{-10}{-5}$ Por transposición de términos $\boxed{x=2}$ $\boxed{y=1}$

La respuesta se puede escribir como un par ordenado $(2, \quad 1)$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es de la forma

$$\begin{cases} a_1 & +b_1 & = & c_1 \\ a_2 & +b_2 & = & c_2 \end{cases}$$

<u>Número de soluciones de los sistemas lineales</u>

Según el número de soluciones, los sistemas se clasifican en

<u>Sistema inconsistente</u> $\Leftrightarrow$ No tiene soluciones

<u>Sistema consistente determinado</u> $\Leftrightarrow$ Tiene solución única

<u>Sistema consistente indeterminado</u> $\Leftrightarrow$ Tiene infinitas soluciones

Ejemplo. Resuelva los siguientes sistemas y grafique las rectas

$\begin{cases} 3x-y=0 \\ 5x+2y=22 \end{cases}$ $\begin{cases} 8x-2y=5 \\ -12x+3y=7 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-6y=12 \\ 4x-8y=16 \end{cases}$

Aplique el método de sustitución o igualación para determinar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1. $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$	$x=3$ $y=1$	**2.** $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+2y=2 \end{cases}$	$x=4$ $y=-1$	**3.** $\begin{cases} x+y^2=0 \\ 2x+5y^2=75 \end{cases}$	$x=-25 \quad y=5$ $x=-25 \quad y=-5$
4. $\begin{cases} x^2+y=9 \\ x-y+3=0 \end{cases}$	$x=-3 \quad y=0$ $x=2 \quad y=5$	**5.** $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y=0 \end{cases}$	$x=-2 \quad y=2$ $x=2 \quad y=-2$	**6** $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=2x \end{cases}$	$x=\sqrt{5} \quad y=2\sqrt{5}$ $x=-\sqrt{5} \quad y=-2\sqrt{5}$
7 $\begin{cases} x^2-y=1 \\ 2x^2+3y=17 \end{cases}$	$x=2 \quad y=3$ $x=-2 \quad y=3$	**8** $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+12 \end{cases}$	$x=4 \quad y=16$ $x=-3 \quad y=9$	**9** $\begin{cases} 3x^2+4y=17 \\ 2x^2+5y=2 \end{cases}$	$x=\sqrt{11} \quad y=-4$ $x=-\sqrt{11} \quad y=-4$

Aplique el método de eliminación para calcular todas las soluciones del sistema de ecuaciones

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
10. $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$	$x=1$ $y=2$	**11** $\begin{cases} 4x-3y=11 \\ 8x+4y=12 \end{cases}$	$x=2$ $y=-1$	**12.** $\begin{cases} x-y=9 \\ x+y=4 \end{cases}$	$x=13/2$ $y=-5/2$
13 $\begin{cases} x^2-y=1 \\ 2x^2+3y=17 \end{cases}$	$x=2 \quad y=3$ $x=-2 \quad y=3$	**14** $\begin{cases} x^2-2y=1 \\ x^2+5y=29 \end{cases}$	$x=3 \quad y=4$ $x=-3 \quad y=4$	**15** $\begin{cases} 3x^2-y^2=11 \\ x^2+4y^2=8 \end{cases}$	$x=2 \quad y=\pm 1$ $x=-2 \quad y=\pm 1$

Resuelva cada sistema o demuestre que no tiene solución. Si tiene infinitas soluciones expréselas en forma de par ordenado utilizando un parámetro.

Ejercicio	Rta.	Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
16. $\begin{cases} x+y=4 \\ -x+y=0 \end{cases}$	$x=2$ $y=2$	**17.** $\begin{cases} x-y=3 \\ x+3y=7 \end{cases}$	$x=4$ $y=1$	**18.** $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 4x+3y=9 \end{cases}$	$x=3$ $y=-1$
19. $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ -x-2y=8 \end{cases}$	$x=4$ $y=-6$	**20.** $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$	$x=2$ $y=1$	**21.** $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$	$x=4$ $y=3$
22 $\begin{cases} -x+y=2 \\ 4x-3y=-3 \end{cases}$	$x=3$ $y=5$	**23.** $\begin{cases} 4x-3y=28 \\ 9x-y=-6 \end{cases}$	$x=-2$ $y=-12$	**24** $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ -6x+4y=16 \end{cases}$	Sin sln
25 $\begin{cases} 8x-3y=-3 \\ 5x-2y=-1 \end{cases}$	$x=-3$ $y=-7$	**26.** $\begin{cases} 2x-6y=10 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$	$x=t$ $y=\frac{t-5}{3}$	**27** $\begin{cases} x-y=4 \\ xy=12 \end{cases}$	$x=2 \quad y=0$ $x=-2 \quad y=0$
28. $\begin{cases} 4x+2y=16 \\ x-5y=70 \end{cases}$	$x=10$ $y=-12$	**29.** $\begin{cases} x+4y=8 \\ 3x+12y=2 \end{cases}$	Sin sln	**30.** $\begin{cases} 6x+4y=12 \\ 9x+6y=18 \end{cases}$	$x=t$ $y=3-\frac{3}{2}t$
31 $\begin{cases} -3x+5y=2 \\ 9x-15y=6 \end{cases}$	Sin sln	**32.** $\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=x^2-4 \end{cases}$	$x=2 \quad y=0$ $x=-2 \quad y=0$	**33.** $\begin{cases} x+y^2=4 \\ y+4x=16 \end{cases}$	$x=63/16 \quad y=1/4$ $x=4 \quad y=0$
34 $\begin{cases} 2x-3y=-8 \\ 14x-21y=3 \end{cases}$	Sin sln	**35.** $\begin{cases} x+2y=7 \\ 5x-y=2 \end{cases}$	$x=1$ $y=3$	**36.** $\begin{cases} x+\sqrt{y}=0 \\ y^2-4x^2=12 \end{cases}$	$x=-\sqrt{2}i \quad y=-2$ $x=-\sqrt{6} \quad y=6$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON VARIAS VARIABLES

Una ecuación lineal en n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

Los coeficientes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números reales y el término constante b es un número real. El número a_1 es el coeficiente principal y x_1 es la variable principal.

Resolver un sistema triangular por sustitución

$$\begin{cases} x & -2y & -z & = & 1 \\ & y & +2z & = & 5 \\ & & z & = & 3 \end{cases}$$

Operaciones que conducen a sistemas de ecuaciones lineales equivalentes

1. Intercambiar dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Sumar un "múltiplo constante" de una ecuación a otra ecuación.

El proceso realizado con las operaciones anteriores para resolver un sistema lineal se denomina eliminación gaussiana.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema utilizando la eliminación gaussiana.

$$\begin{cases} x & -2y & +4z & = & -20 \\ 4x & +2y & -4z & = & 10 \\ 3x & +2y & -3z & = & 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +4z & = & -20 \\ 4x & +2y & -4z & = & 10 \\ 3x & +2y & -3z & = & 5 \end{array}\right\} \text{Sumamos -4 veces la primera ecuación a la segunda}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +4z & = & -20 \\ & +10y & -20z & = & 90 \\ 3x & +2y & -3z & = & 5 \end{array}\right\} \text{Sumamos -3 veces la primera ecuación a la tercera}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +4z & = & -20 \\ & +10y & -20z & = & 90 \\ & 8y & -15z & = & 65 \end{array}\right\} \text{Multiplicamos por } \tfrac{1}{10} \text{ la segunda ecuación}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +4z & = & -20 \\ & y & -2z & = & 9 \\ & 8y & -15z & = & 65 \end{array}\right\} \text{Sumamos -8 veces la segunda ecuación a la tercera}$$

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +4z & = & -20 \\ & y & -2z & = & 9 \\ & & z & = & -7 \end{array}\right\} \text{Hallamos las soluciones por sustitución}$$

De la tercera ecuación vemos que $\boxed{z=-7}$, al sustituirla en la segunda ecuación $y-2(-7)=9$, obtenemos $\boxed{y=-5}$. Para obtener el valor de x sustituimos $z=-7$ y $y=-5$ en la primera ecuación $x-2(-5)+4(-7)=-20$, con lo cual $\boxed{x=-2}$

Resolver los siguientes sistemas.

Ejercicio	Respuesta.	Ejercicio	Respuesta.
37. $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ y + 2z = 7 \\ z = 2 \end{cases}$	$x=1$ $y=3$ $z=2$	**38.** $\begin{cases} x + y - 3z = 8 \\ y - 3z = 5 \\ z = -1 \end{cases}$	$x=3$ $y=2$ $z=-1$
39. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2y - z = 2 \\ 3z = 12 \end{cases}$	$x=4$ $y=3$ $z=4$	**40.** $\begin{cases} 2x - y + 6z = 5 \\ y + 4z = 0 \\ -2z = 1 \end{cases}$	$x=5$ $y=2$ $z=-\frac{1}{2}$
41. $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -y + 3z = 9 \\ 2z = 6 \end{cases}$	$x=4$ $y=0$ $z=3$	**42.** $\begin{cases} 4x + 3z = 10 \\ 2y - z = -6 \\ \frac{1}{2}z = 4 \end{cases}$	$x=-\frac{7}{2}$ $y=1$ $z=8$
43. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$	$x=1$ $y=-3$ $z=2$	**44.** $\begin{cases} x - 4z = 1 \\ 2x - y - 6z = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \end{cases}$	$x=5$ $y=0$ $z=1$
45. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$	$x=0$ $y=1$ $z=2$	**46.** $\begin{cases} 2x + y - z = -8 \\ -x + y + z = 3 \\ -2x + 4z = 18 \end{cases}$	$x=-1$ $y=-2$ $z=4$
47. $\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = 6 \\ 3x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$	Sin sln	**48.** $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 3z = 10 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$	$x=1$ $y=2$ $z=1$
49. $\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \end{cases}$	Sin sln	**50.** $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x - 3y - 7z = 5 \end{cases}$	Sin sln
51. $\begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x + 3y = 2 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases}$	Sin sln	**52.** $\begin{cases} x \quad 2y + z = 3 \\ 5x + 4y + 3z = -1 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$	$x=-\frac{13}{2}$ $y=-\frac{3}{2}$ $z=\frac{25}{2}$
53. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \\ 3x + 6y - 3z = 4 \end{cases}$	Sin sln	**54.** $\begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ x \quad y - 2z = 0 \\ 4x - 2y - 11z = 2 \end{cases}$	$x=2$ $y=-\frac{2}{3}$ $z=\frac{2}{3}$
55. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases}$	Sin sln	**56.** $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 5y + z = 7 \\ 2x \quad 3y \quad 5z = 1 \end{cases}$	$x=\frac{5}{2}$ $y=-\frac{1}{2}$ $z=-\frac{1}{2}$
57. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \end{cases}$	Sin sln	**58.** $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 4z = 4 \\ 4x + 6y + y = 4 \end{cases}$	$x=2$ $y=-\frac{2}{3}$ $z=0$

DETERMINANTES Y LA REGLA DE CRAMER

Asociado a cada matriz cuadrada A (igual número de renglones que de columnas) hay un número llamado **determinante de A**, denotado como $|A|$.

Definición de la regla de Sarrus para un sistema de tres variables.

$$\text{"det } A\text{"} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{13} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Definición de la regla de Cramer para un sistema de tres variables.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

Ejemplo: Hallar la solución del sistema utilizando la regla de Sarrus

$$\begin{cases} 2x & +y & -3z & = & 12 \\ 5x & -4y & +7z & = & 27 \\ 10x & +3y & -z & = & 40 \end{cases}$$

$$X = \frac{\begin{pmatrix} 12 & 1 & -3 \\ 27 & -4 & 7 \\ 40 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 12 & 1 \\ 27 & -4 \\ 40 & 3 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 10 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \\ 10 & 3 \end{matrix}} = \frac{[(48)+(280)+(-243)]-[(480)+(252)+(-27)]}{[(8)+(70)+(-45)]-[(120)+(42)+(-5)]} = \frac{-620}{-124} = 5$$

$$Y = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 12 & -3 \\ 5 & 27 & 7 \\ 10 & 40 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 12 \\ 5 & 27 \\ 10 & 40 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 10 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \\ 10 & 3 \end{matrix}} = \frac{[(-54)+(840)+(-600)]-[(-810)+(560)+(-60)]}{[(8)+(70)+(-45)]-[(120)+(42)+(-5)]} = \frac{496}{-124} = -4$$

$$Z=\frac{\left(\begin{array}{ccc}2 & 1 & 12\\ 5 & -4 & 27\\ 10 & 3 & 40\end{array}\right)\begin{array}{cc}2 & 1\\ 5 & -4\\ 10 & 3\end{array}}{\left(\begin{array}{ccc}2 & 1 & -3\\ 5 & -4 & 7\\ 10 & 3 & -1\end{array}\right)\begin{array}{cc}2 & 1\\ 5 & -4\\ 10 & 3\end{array}}=\frac{[(-320)+(270)+(180)]-[(-480)+(162)+(200)]}{[(8)+(70)+(-45)]-[(120)+(42)+(-5)]}=\frac{248}{-124}=-2$$

Así la solución del sistema es: $(x=5, y=-4, z=-2)$

Utilizar la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas

Ejercicio	Respuesta.	Ejercicio	Respuesta.
59. $\begin{cases}2x & -3y & +4z & = & -17\\ 3x & -2y & +3z & = & -17\\ x & +2y & -7z & = & 37\end{cases}$	$x=-2$ $y=-5$ $z=-7$	**60.** $\begin{cases}x & -2y & -3z & = & -1\\ 2x & +y & +z & = & 6\\ x & +3y & -2z & = & 13\end{cases}$	$x=2$ $y=3$ $z=-1$
61 $\begin{cases}-4x & -2y & -5z & = & 3\\ 6x & +6y & +12z & = & 6\\ 8x & 4y & 10z & = & 15\end{cases}$	Sin sln	**62.** $\begin{cases}x & +3y & -z & = & -3\\ 3x & -y & +2z & = & 1\\ 2x & -y & +z & = & -1\end{cases}$	$x=-2$ $y=1$ $z=4$
63. $\begin{cases}2x & -3y & +2z & = & -3\\ -3x & +2y & +z & = & 1\\ 4x & +y & -3z & = & 4\end{cases}$	$x=\frac{2}{3}$ $y=\frac{31}{21}$ $z=\frac{1}{21}$	**64.** $\begin{cases}-x & +3y & +z & = & 1\\ 2x & +5y & & = & 3\\ 3x & +y & -2z & = & -2\end{cases}$	$x=\frac{7}{3}$ $y=-\frac{1}{3}$ $z=\frac{13}{3}$
65. $\begin{cases}3x & +2y & -z & = & 4\\ & 2y & -6z & = & 1\\ 3x & +2y & +4z & = & 4\end{cases}$	$x=1$ $y=\frac{1}{2}$ $z=0$	**66.** $\begin{cases}2x & +2y & -z & = & 3\\ & 2y & -6z & = & 4\\ x & -5y & +4z & = & 2\end{cases}$	$x=\frac{49}{27}$ $y=-\frac{7}{9}$ $z=-\frac{25}{27}$
67. $\begin{cases}2x & +2y & -z & = & 5\\ 3x & -2y & +5z & = & 4\\ 5x & -5y & +4z & = & 2\end{cases}$	$x=\frac{89}{65}$ $y=\frac{7}{5}$ $z=\frac{7}{13}$	**68** $\begin{cases}-x & +3y & +z & = & 1\\ 2x & +5y & & = & 3\\ 3x & +y & +z & = & -2\end{cases}$	$x=-\frac{3}{8}$ $y=\frac{3}{4}$ $z=-\frac{13}{8}$
69. $\begin{cases}3x & +2y & -z & = & 4\\ & 2y & -6z & = & 4\\ 3x & +2y & +4z & = & 0\end{cases}$	$x=\frac{4}{3}$ $y=-\frac{2}{5}$ $z=-\frac{4}{5}$	**70.** $\begin{cases}2x & +2y & -z & = & 3\\ x & +2y & -6z & = & 4\\ x & +3y & +4z & = & 2\end{cases}$	$x=\frac{14}{31}$ $y=\frac{28}{31}$ $z=-\frac{9}{31}$
71. $\begin{cases}2x & +2y & -z & = & 3\\ & -2y & -6z & = & 4\\ x & -5y & +4z & = & 2\end{cases}$	$x=\frac{77}{45}$ $y=-\frac{7}{15}$ $z=-\frac{23}{45}$	**72.** $\begin{cases}x & -2y & -3z & = & 5\\ 2x & +y & -z & = & 5\\ 4x & -3y & -7z & = & 5\end{cases}$	Sin sln
73. $\begin{cases} & y & -2z & = & 0\\ 2x & +3y & & = & 2\\ -x & -2y & +z & = & -1\end{cases}$	Sin sln	**74.** $\begin{cases}x & 2y & +z & = & 3\\ 5x & +4y & +3z & = & -1\\ x & -3y & & = & -2\end{cases}$	$x=-\frac{13}{2}$ $y=-\frac{3}{2}$ $z=\frac{25}{2}$