Instituto Tecnológico Metropolitano ITM

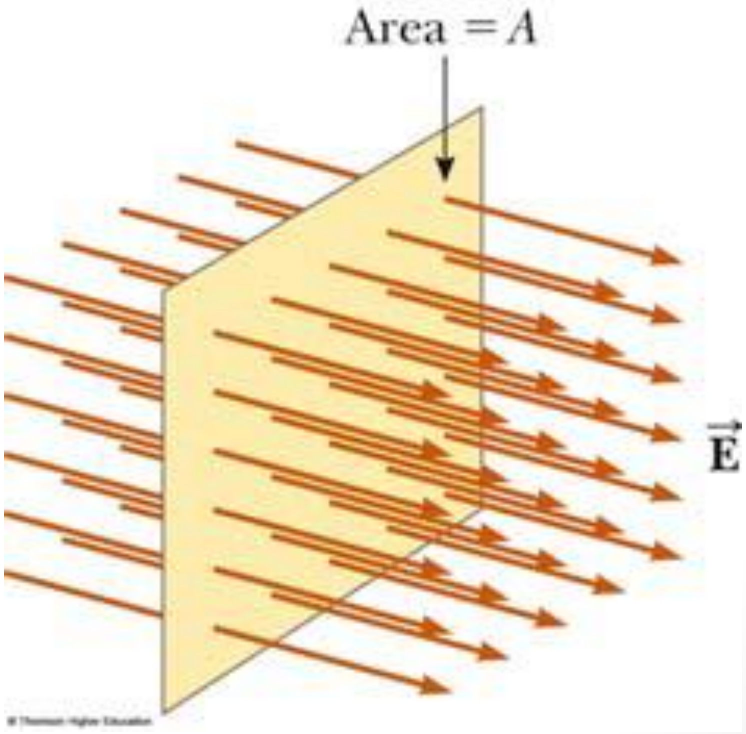
2.8 Ley de Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos. Ayudó a desarrollar varias ramas de las matemáticas, incluidos la geometría diferencial, el análisis real y la teoría de números. Una de sus invenciones es la “curva de campana” de la estadística. Gauss también realizó investigaciones de vanguardia sobre el magnetismo de la Tierra y calculó la órbita del primer asteroide que se descubrió.

2.8 Ley de Gauss

Flujo eléctrico: el flujo eléctrico es el producto de la magnitud del campo eléctrico y el área superficial, cuando A es perpendicular al campo

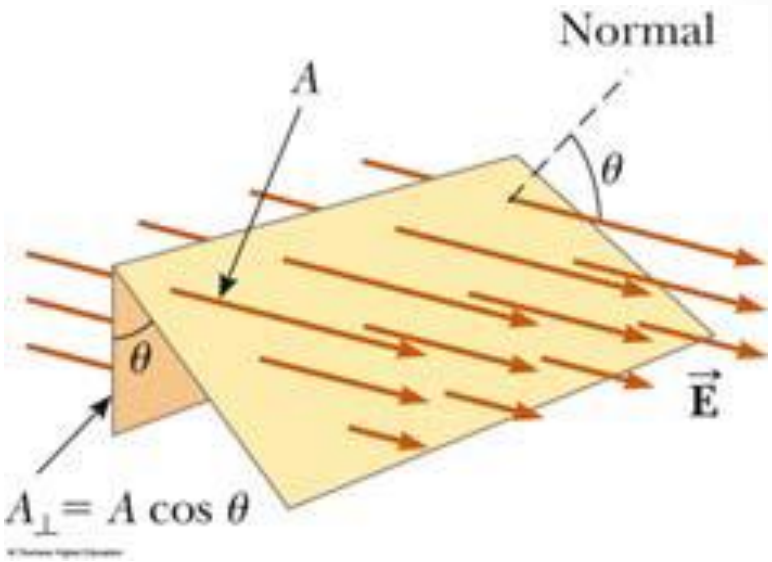
$$\Phi_E = EA$$



2.8 Flujo Eléctrico

El flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que penetran en una superficie

Las líneas de campo puede formar un ángulo θ con la perpendicular a la superficie



$$\Phi_E = EA\cos\theta$$

2.8 Flujo Eléctrico

El flujo es máximo cuando la superficie es perpendicular al campo.

El flujo es cero cuando la superficie es paralela al campo

Si el campo varía a lo largo de la superficie, de la forma:

$$\Phi_E = EA \cos \theta$$

Esto será válido sólo para un pequeño elemento de Área

2.8 Flujo Eléctrico

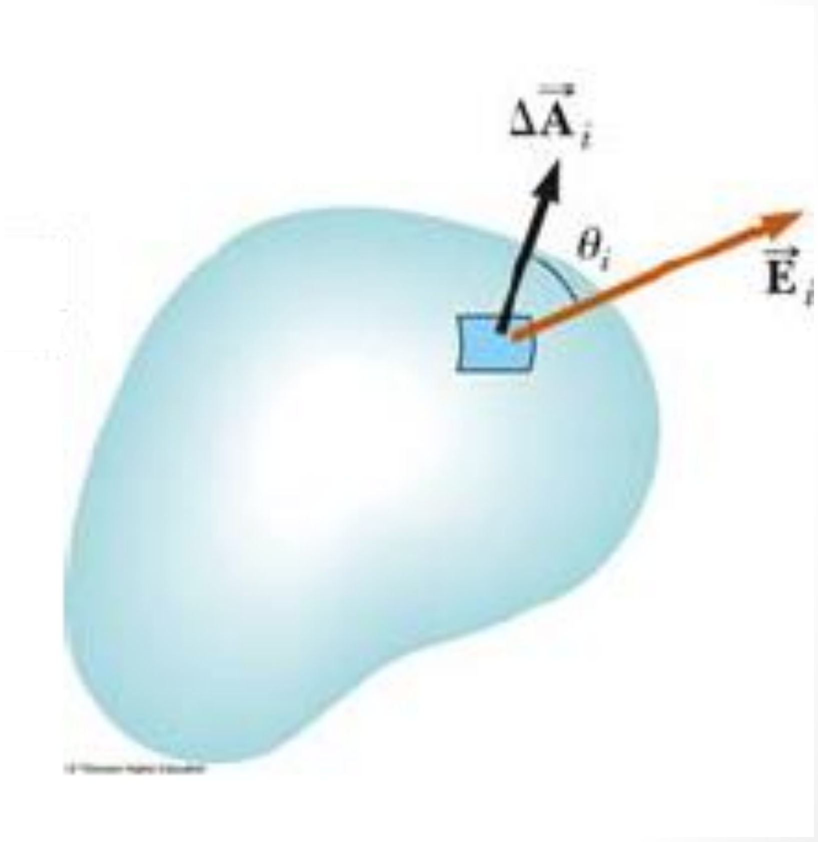
En el caso más general, un pequeño elemento de área

$$\Delta\Phi_E = E_i \Delta A_i \cos\theta_i = \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_i$$

En general, esto se convierte

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum E_i \cdot \Delta A_i$$

$$\Phi_E = \int_{\text{surface}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$



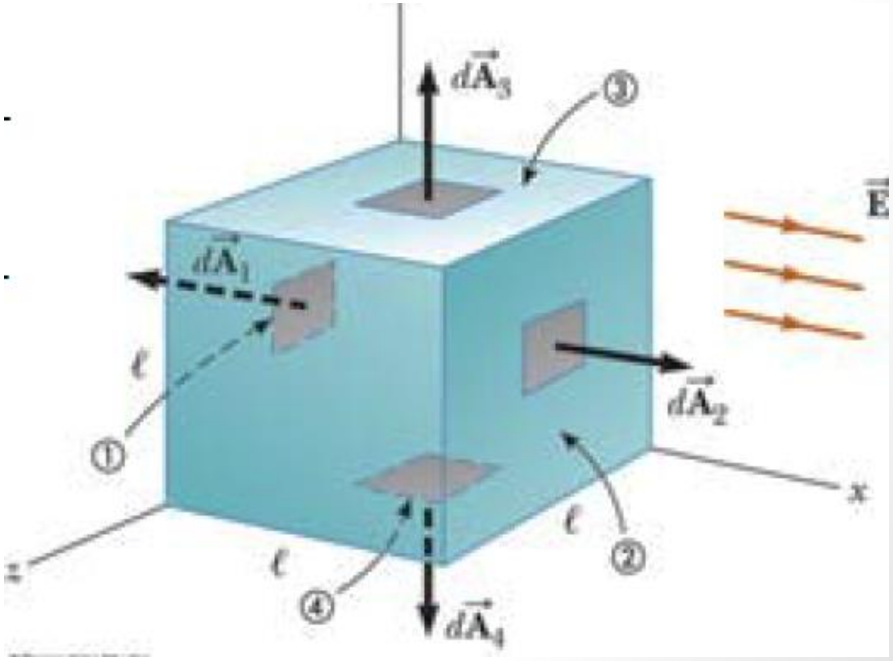
2.8 Flujo Eléctrico

El flujo neto a través de la superficie es proporcional a la cantidad neta de líneas que salen de la superficie

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E_n dA$$

Calculemos el flujo para un cubo:

$$\Phi_E = \int_1 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_2 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_3 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_4 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_5 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_6 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$



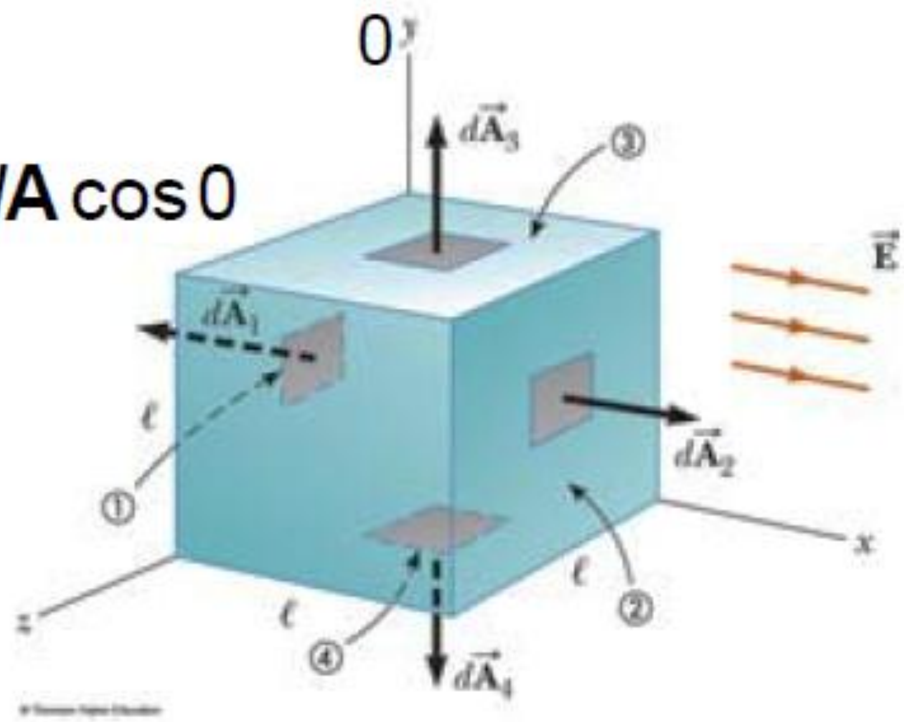
2.8 Flujo Eléctrico

$$\Phi_E = \int_1 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_2 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

$$\Phi_E = \int_1 \mathbf{E}\, d\mathbf{A} \cos \pi + \int_2 \mathbf{E}\, d\mathbf{A} \cos 0$$

$$\Phi_E = -\mathbf{E}l^2 + \mathbf{E}l^2$$

$$\boxed{\Phi_{E\,total} = 0}$$



2.9 Ley de Gauss

La idea de usar la ley de Gauss para calcular la magnitud de un campo eléctrico se deriva exactamente de la generalidad de la ley: la forma de la superficie cerrada es arbitraria. Esto significa que en algunas situaciones se puede elegir una superficie que permita encontrar la magnitud del campo.

2.9 Ley de Gauss

Dada cualquier distribución general de carga, se rodea con una superficie imaginaria que la encierre y luego se observa el campo eléctrico en distintos puntos de esa superficie imaginaria.

La ley de Gauss es una relación entre el campo en todos los puntos de la superficie y la carga total que ésta encierra.

2.9 Ley de Gauss

La ley de gauss estable que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga total encerada por la superficie.

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E \oint dA$$

$$\boxed{\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint \left(\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 \ldots \right) \cdot d\vec{\mathbf{A}}}$$

Por ejemplo para una superficie imaginaria esférica será:

$$\boxed{\Phi_E = 4\pi k_e q = \frac{q}{\varepsilon_o}}$$

2.9 Ley de Gauss

Generalidades en el comportamiento de las cargas:

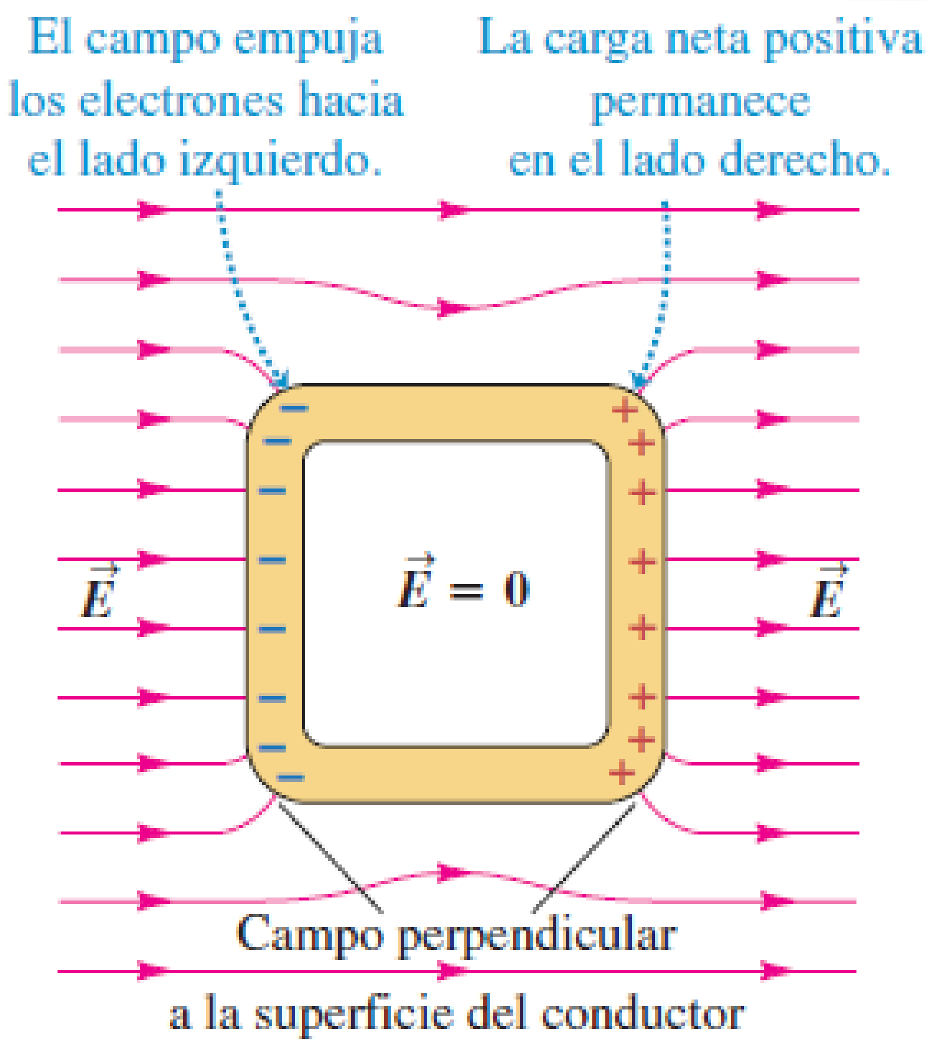
las cargas estáticas en conductores se ubican en su superficie.

El campo eléctrico estático dentro de un conductor es cero.

El campo eléctrico estático en cualquier punto de la superficie de un conductor es perpendicular a la superficie y de magnitud $|\sigma|/\varepsilon_0$ donde $|\sigma|$ es la magnitud de la densidad de carga superficial local en el lugar en cuestión.

2.9 Ley de Gauss

- Caja conductora (jaula deFaraday) inmersa en un campo eléctrico uniforme.
- El campo de las cargas inducidas sobre la caja se combina con el campo uniforme para dar un campo total igual a cero dentro de la caja.
- El aislamiento electrostático protege de las descargas eléctricas peligrosas.



2.9 Ley de Gauss

La ley de gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga total encerada por la superficie dividido por ε_0

$$\Phi_E = \oint \mathbf{\vec{E}} \cdot d\mathbf{\vec{A}} = E \oint dA$$

$$\boxed{\oint \mathbf{\vec{E}} \cdot d\mathbf{\vec{A}} = \oint \left(\mathbf{\vec{E}}_1 + \mathbf{\vec{E}}_2 \ldots \right) \cdot d\mathbf{\vec{A}}}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ley de Gauss – Cómo se usa?

- Es cierta siempre pero….
- Sólo es <u>útil</u> para situaciones donde hay <u>mucha simetría</u>.
- Su uso es sutil!!!!

- Hay que usar la simetría para saber dónde E es constante y cuál es su dirección.

- Hay que encontrar una superficie <u>cerrada</u> en la cual E sea constante o donde el flujo sea cero (E perpendicular a la superficie).

Pasos para uso de la Ley de Gauss

1. Escoger superficie de Gauss de acuerdo a la simetría.
   - Que pase por P.
   - Que sea cerrada.
   - Que E sea constante (por lo menos en parte) de la superficie.
   - Que E sea paralela a la superficie en las partes donde no es constante.

2. El integral sale directo a una expresión algebraica que contiene E.

3. Calcular Q_N (en la región de interés).
   - Es lo que distingue cada situación y cada región.
   - Es diferente en cada región.
   - A veces hay que calcular la densidad de carga. Q_N es el producto de densidad por el volumen de carga dentro de la superficie.

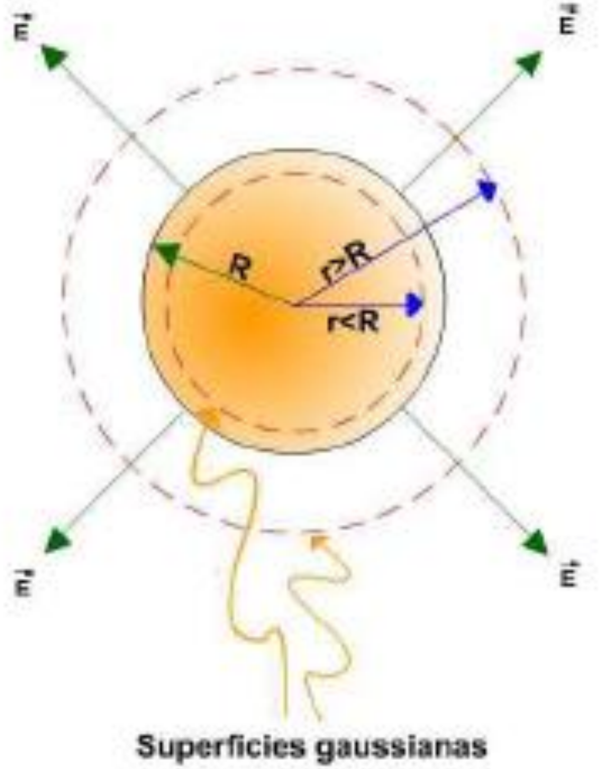
4. Resolver por E algebraicamente.

2.10 Aplicación de la ley de Gauss

DISTRIBUCIÓN ESFÉRICA (Esfera maciza)

Una carga Q se encuentra uniformemente distribuida en todo el volumen de una esfera no conductora de radio R. Determinar el campo eléctrico en puntos:

1. fuera de la esfera, $r > R$
2. dentro de la esfera, $r \leq R$



2.10 Aplicación de la ley de Gauss

1. En la figura se muestran las líneas de campo eléctrico $\bar{E}$, suponiendo la esfera cargada positivamente, y se muestran también las superficies gaussianas para $r > R$ y $r < R$, las cuales consisten de esferas centradas en la esfera cargada. De la ley de Gauss,

$$\varepsilon_o \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q$$

cuando $r > R$ la carga que encierra la superficie gaussiana es exactamente Q. Debido a la simetría esférica,

$$\varepsilon_o E \oint ds = Q$$

$$\varepsilon_o E(4\pi r^2) = Q$$

Y despejando E tenemos

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad r > R$$

Lo mismo que obtendríamos si la carga Q fuese una carga punto colocada en el centro de la esfera.

2.10 Aplicación de la ley de Gauss

2. $r < R$

Para esta situación, la carga Q' encerrada por la superficie gaussiana es menor que Q, y será

$$Q' = \rho V' = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3)$$

Donde ρ es la densidad de carga y V' es el volumen encerrado por la carga Q'

Como

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{carga\ \ total}{volumen\ \ esfera} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

resulta

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \quad , \text{ y,}$$

$$Q' = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}(\frac{4}{3}\pi r^3) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

2.10 Aplicación de la ley de Gauss

De la ley de Gauss

$$\varepsilon_o \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q'$$

$$\varepsilon_o E(4\pi r^2) = Q\frac{r^3}{R^3} \quad , \quad \mathrm{r < R}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3}$$

Observe que el campo es cero para $r = 0$, y aumenta linealmente con r hasta $r = R$, y después decrece inversamente a r^2, es decir,

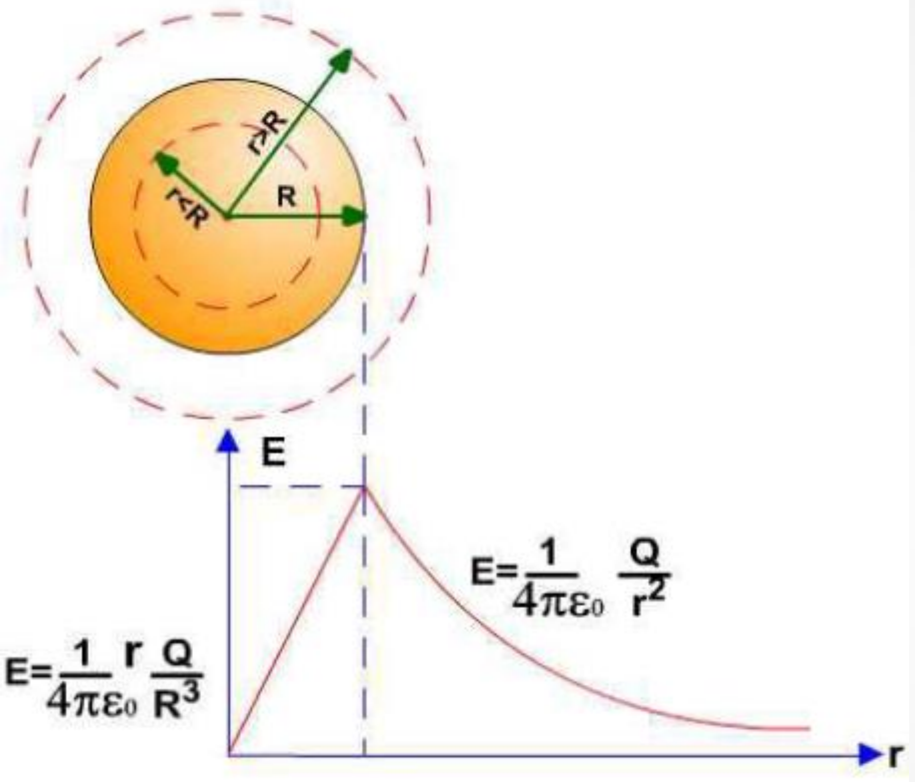
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3},\ E\ \alpha\ r, \text{ para } r < R, \qquad \text{y,}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2},\ E\ \alpha\ \frac{1}{r^2}, \text{ para } r > R$$

2.10 Aplicación de la ley de Gauss

- Dentro de la esfera, E varía linealmente con r E → 0 cuando r → 0

- El campo fuera de la esfera es equivalente a que de una carga puntual situada en el centro de la esfera

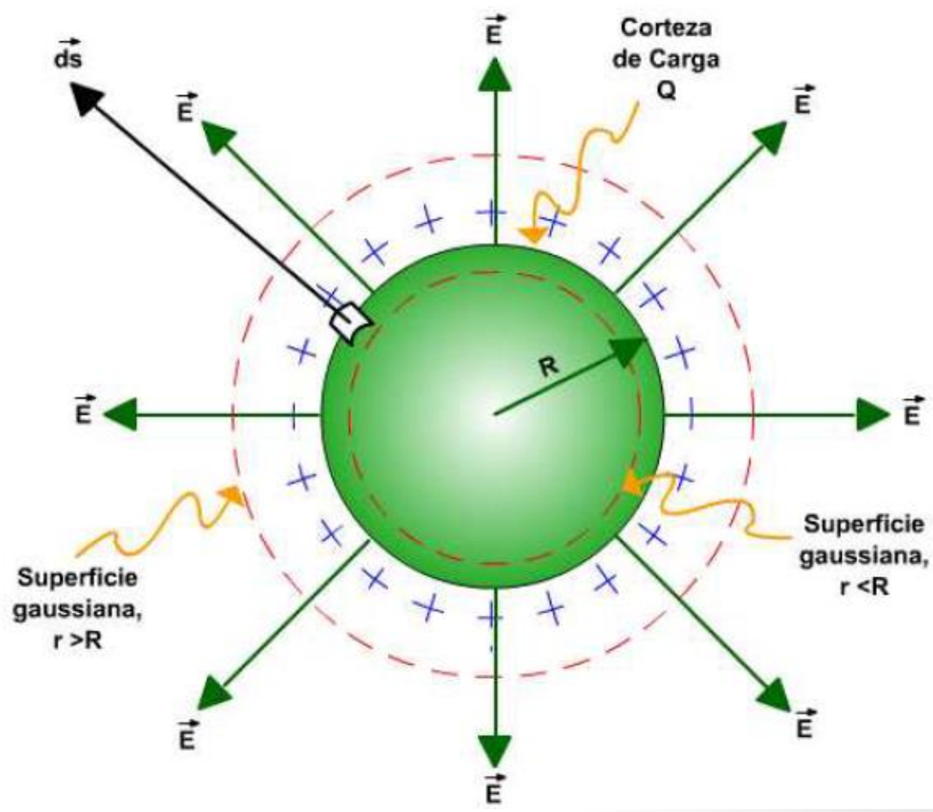


2.10 Aplicación de la ley de Gauss

Una corteza esférica delgada de radio R tiene una carga total Q distribuida uniformemente sobre su superficie. Determine el campo eléctrico para puntos

1. $r \geq R$, es decir, fuera del cascarón

2. $r < R$, es decir, dentro del cascarón



2.10 Aplicación de la ley de Gauss

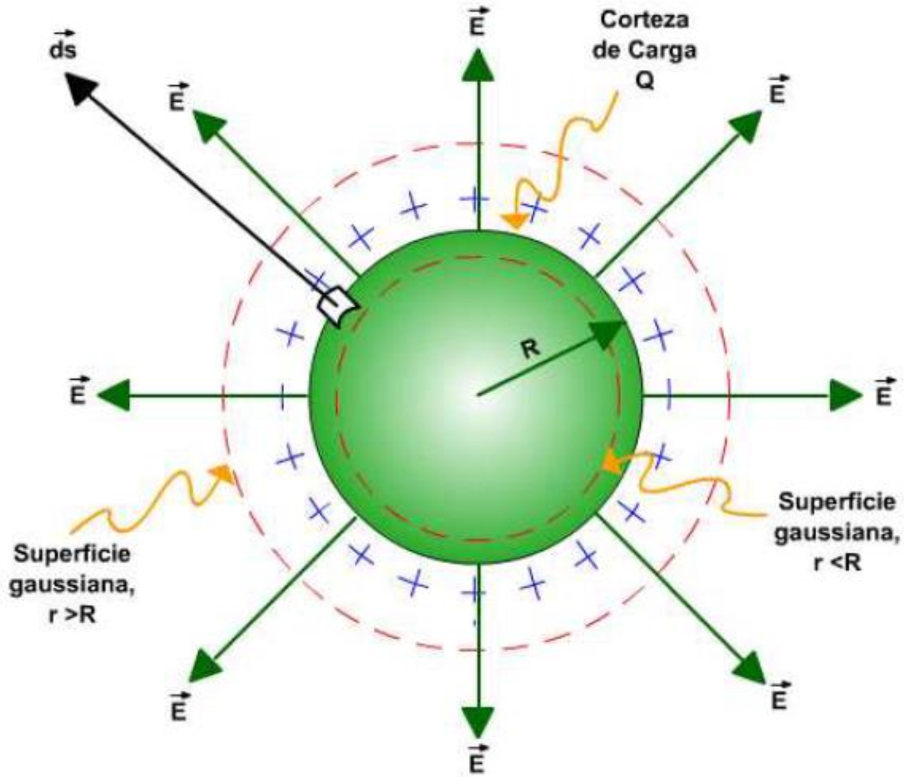
1. En la figura se muestran las líneas de campo y los elementos de superficie supuesta la corteza cargada positivamente. Si construimos una superficie gaussiana esférica de radio $r \geq R$, como se muestra en la figura, la ley de Gauss

$$\varepsilon_o \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q$$ permite escribir

$$\varepsilon_o E(4\pi r^2) = Q$$

Y despejando E tenemos

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad , \quad r > R$$



Que es igual al campo debido a una carga puntual de magnitud Q colocada en el centro de la corteza.

2.10 Aplicación de la ley de Gauss

2. $r < R$

En este caso, la carga encerrada por la superficie gaussiana es cero, y la ley de Gauss dice que

$$\varepsilon_o \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \,,$$

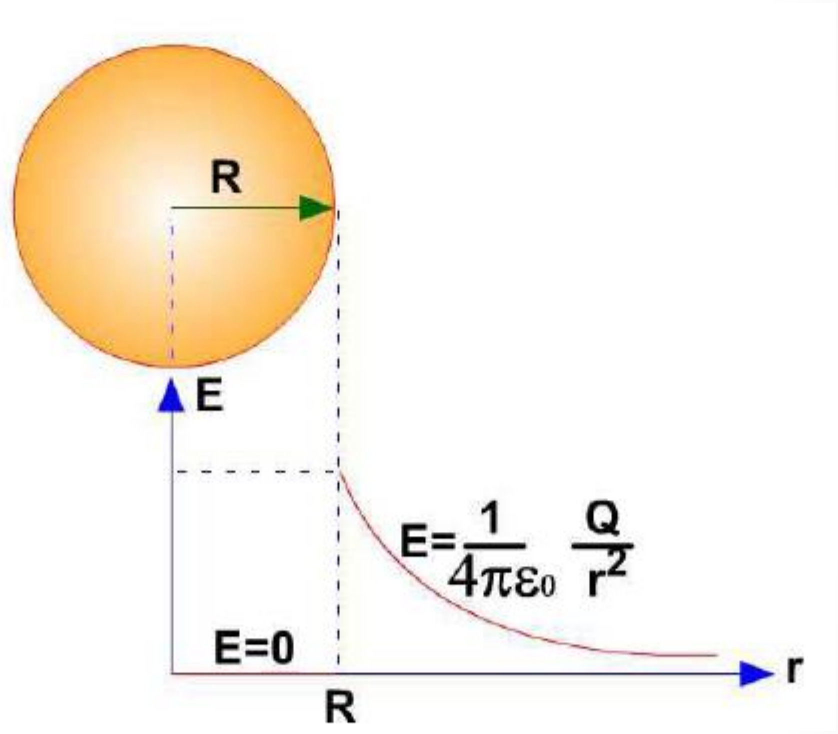
$$\varepsilon_o E(4\pi r^2) = 0 \qquad \text{, de donde}$$

$$E = 0$$

Es decir que el campo E es cero en todos los puntos interiores.

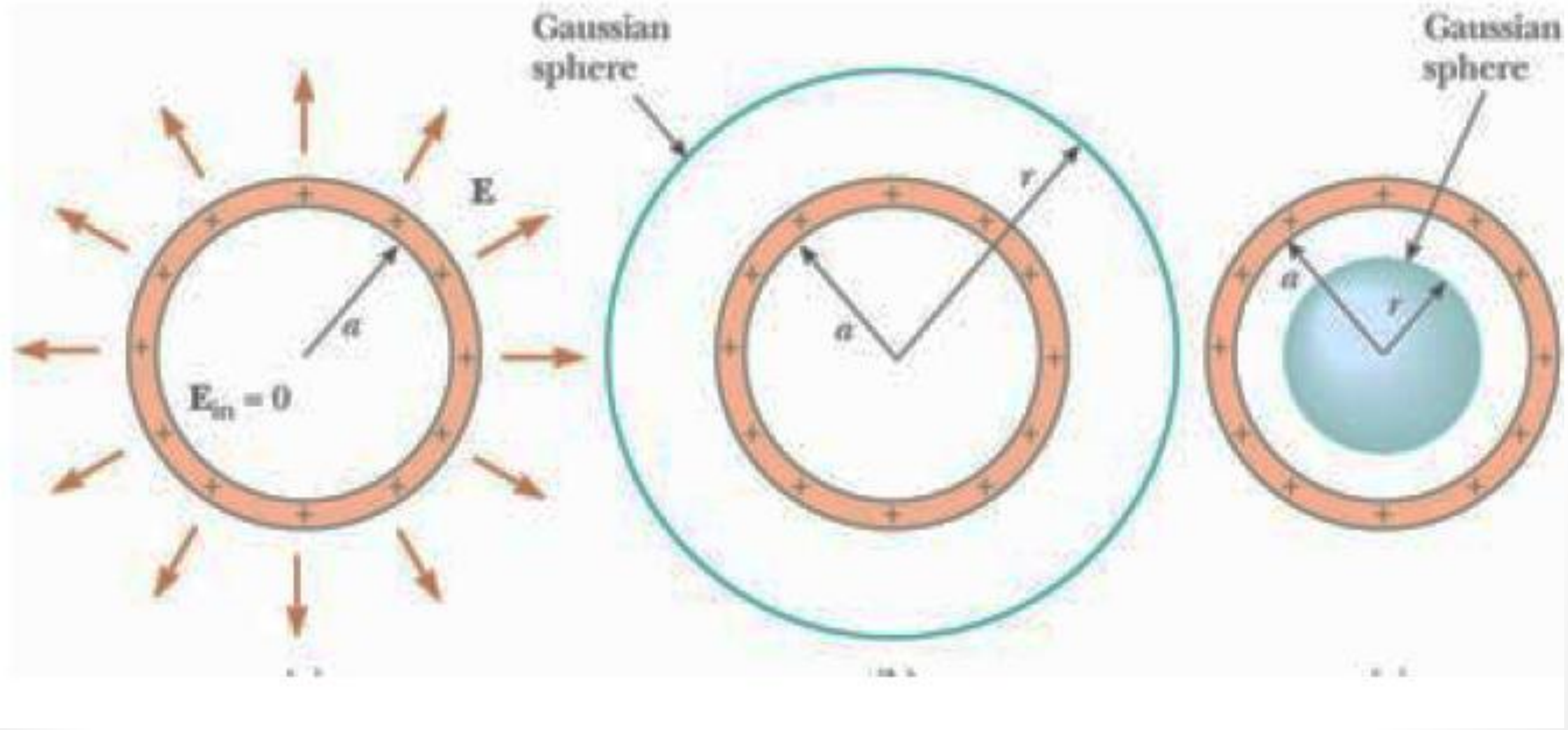
2.10 Aplicación de la ley de Gauss

- Dentro de la esfera, E = 0
- El campo fuera de la esfera es equivalente a que de una carga puntual situada en el centro de la esfera



2.10 Aplicación de la ley de Gauss

- Cascarones esféricos:



2.10 Aplicación de la ley de Gauss

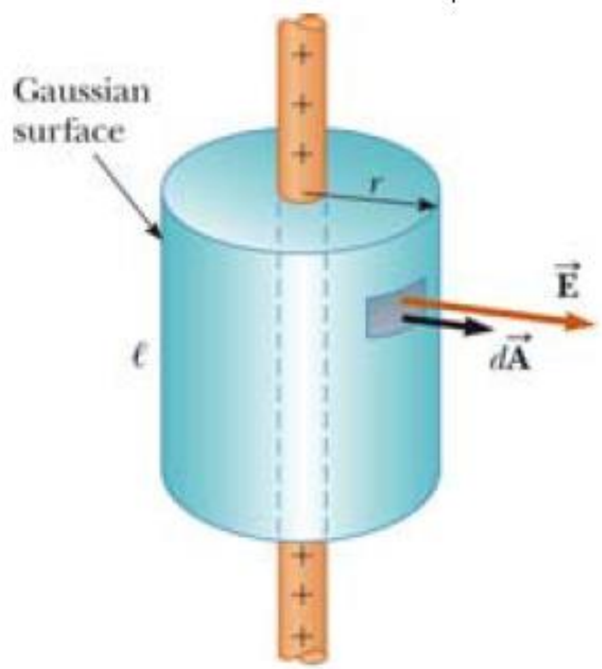
Campo para un hilo cargado en un punto a una distancia r

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$

$$\mathbf{E\ (2\pi rl)\ cos0} = E(2\pi r l) = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_o}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}}$$



2.10 Aplicación de la ley de Gauss

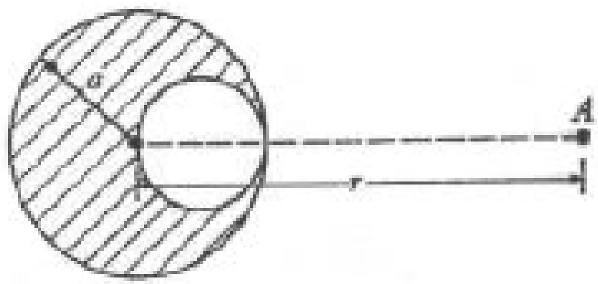
Para una línea infinita, con densidad lineal de carga uniforme, el campo eléctrico en cualquier punto p, es perpendicular a la línea de carga y de magnitud:

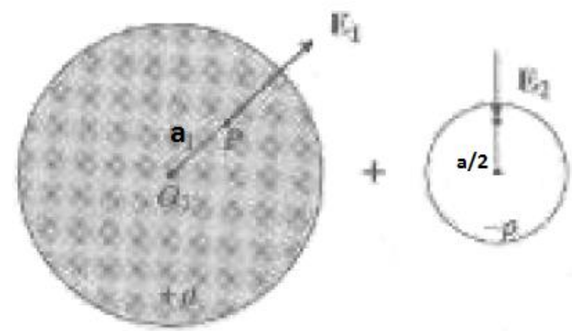
$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}}$$

Donde r es la distancia perpendicular de la línea de carga al punto.

2.10 Aplicación de la ley de Gauss

Una ***esfera no conductora*** de radio a con una densidad de carga uniforme ρ tiene una ***cavidad*** esférica como se muestra en la siguiente figura, calcule el campo eléctrico en el punto A.





Utilizando el principio de superposición, se tiene que

$$E_A = E_{Esfera} + E_{Cavidad}$$

Aplicando la ley de Gauss

2.10 Aplicación de la ley de Gauss

Aplicando la ley de Gauss

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc.}}{\varepsilon_0}$$

para la esfera no conductora, como $\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{s}$ se tiene

$$\oiint E ds = \frac{q_{Esfera}}{\varepsilon_0}$$

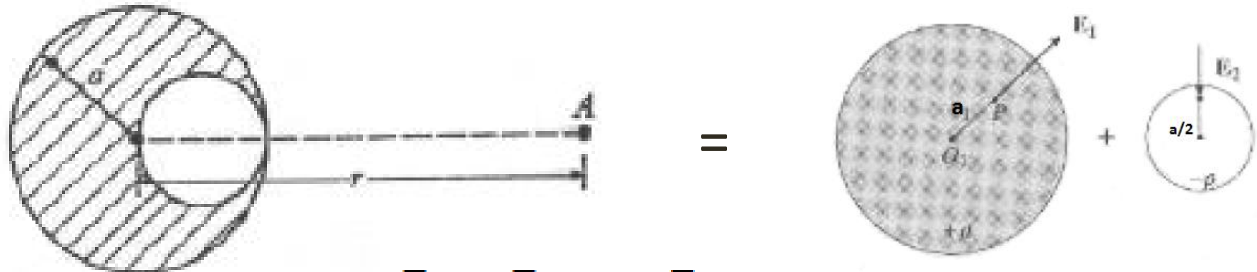
dado que $E = \left|\vec{E}\right| = Cte$ sobre todos los puntos de la superficie Gaussiana, entonces

$$E \oiint ds \equiv E 4\pi r^2 = \frac{q_{Esfera}}{\varepsilon_0}$$

de donde:

$$E_{Esfera} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{Esfera}}{r^2}$$

2.10 Aplicación de la ley de Gauss



$$E_A = E_{Esfera} + E_{Cavidad}$$

$$q_{Esfera} = \rho\upsilon_{Esfera} = \rho 4\pi a^3 / 3$$

$$q_{Cavidad} = -\rho\upsilon_{Cavidada} = -\rho 4\pi (a/2)^3 / 3$$

Entonces:

$$E_{Esfera} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{\rho a^3}{r^2} \qquad E_{Cavidad} = -\frac{1}{24\varepsilon_0}\frac{\rho a^3}{(r-a/2)^2}$$

2.10 Aplicación de la ley de Gauss

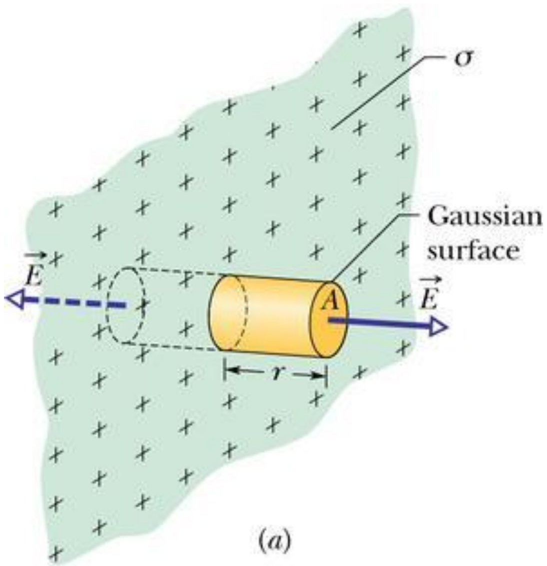
Entonces: $E_A = E_{Esfera} + E_{Cavidad}$

Sustituyendo ambos campos (esfera y cavidad) en E_A, se encuentra

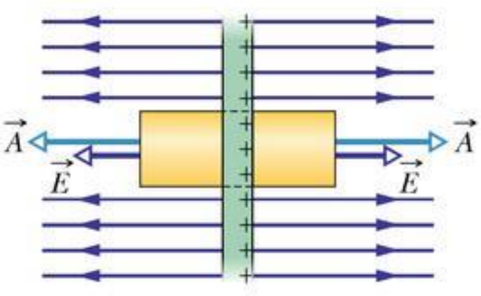
$$E_{Esfera} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{\rho a^3}{r^2} \qquad E_{Cavidad} = -\frac{1}{24\varepsilon_0}\frac{\rho a^3}{(r - a/2)^2}$$

$$E_A = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{8(r - a/2)^2}\right)$$

Aplicación de la Ley de Gauss Simetría Plana



(a)



(b)

La única dirección especificada por la situación física es la dirección perpendicular al plano. Por tanto, ésta tiene que ser la dirección de E.

Puntos que quedan en planos paralelos están equidistantes al plano y tienen un campo E de la misma magnitud

La superficie Gaussiana que usamos tiene tapas que son dos de esos planos paralelos. El flujo a través de la superficie Gaussiana es cero. Los flujos a través de las dos tapas son iguales.

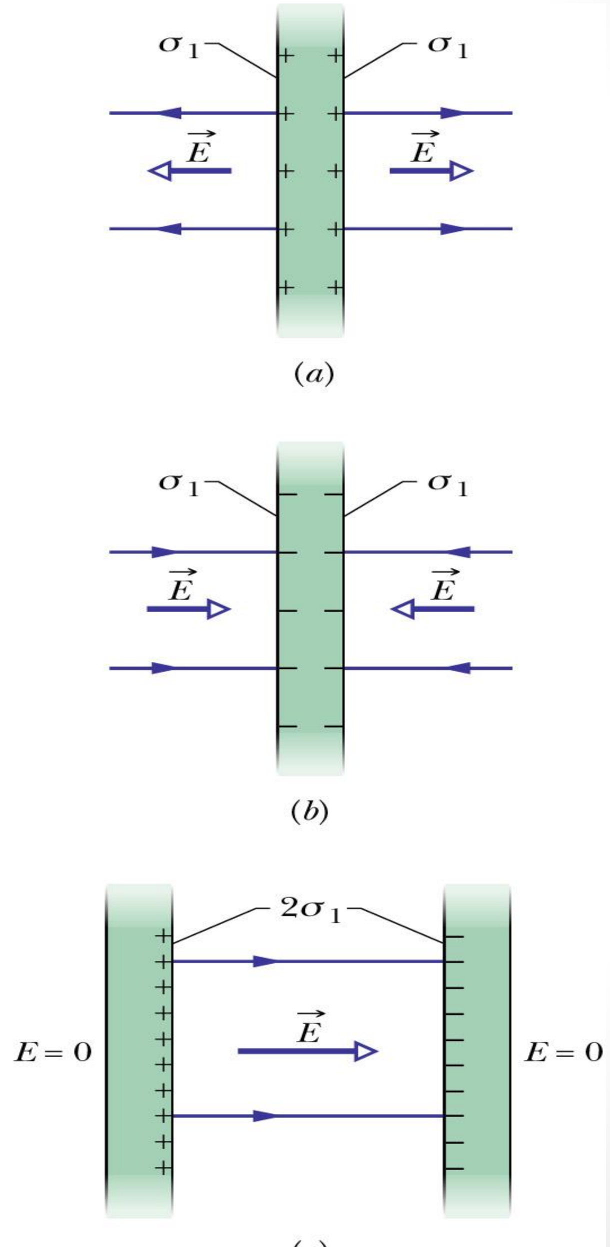
$$\epsilon_0(EA + EA) = \sigma A,$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

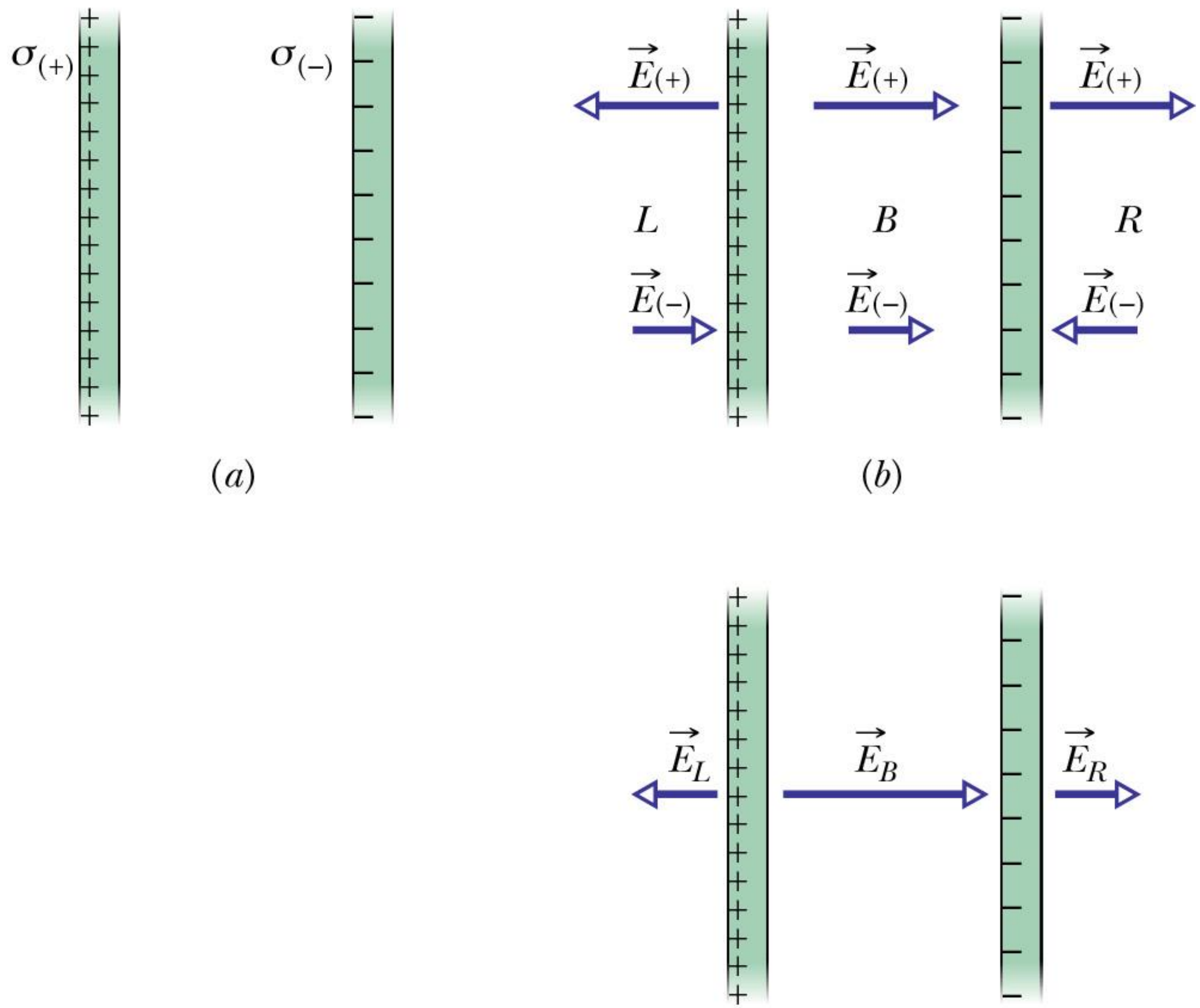
Dos placas conductoras:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_T = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$



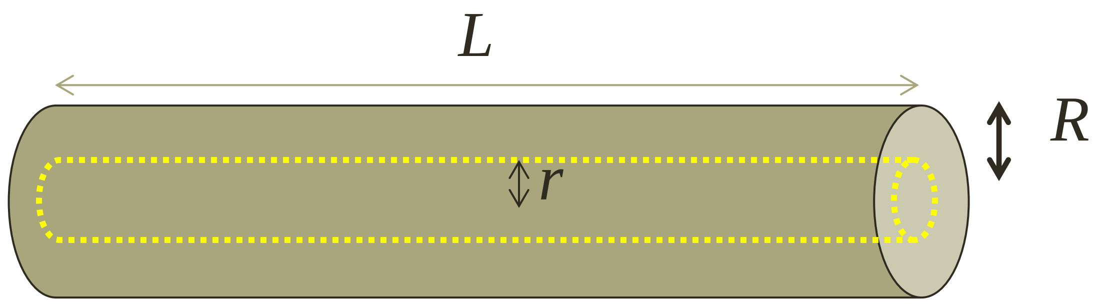
Ejemplo



$\sigma_{(+)}$
$\sigma_{(-)}$
$\vec{E}_{(+)}$
$\vec{E}_{(+)}$
$\vec{E}_{(+)}$
L
B
R
$\vec{E}_{(-)}$
$\vec{E}_{(-)}$
$\vec{E}_{(-)}$
$\vec{E}_L$
$\vec{E}_B$
$\vec{E}_R$

(a) (b) (c)

Cilindro Cargado



Encontrar el campo eléctrico en el interior del cilindro

- Cilindro de longitud infinita, radio *R* y densidad de carga ρ
- El campo eléctrico tiene dirección perpendicular al eje del cilindro.

$$\Phi = AE = 2\pi rLE = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{V\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\pi r^2 \rho L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{r\rho}{2\varepsilon_0}$$