Instituto Tecnológico Metropolitano ITM

2.9 Ley de Gauss

La ley de gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga total encerada por la superficie dividido por ε_0

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E \oint dA$$

$$\boxed{\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint \left(\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 \ldots\right) \cdot d\vec{\mathbf{A}}}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Pasos para uso de la Ley de Gauss

1. Escoger superficie de Gauss de <u>acuerdo a la simetría</u>.
   - Que pase por P.
   - Que sea cerrada.
   - Que E sea constante (por lo menos en parte) de la superficie.
   - Que E sea paralela a la superficie en las partes donde no es constante.

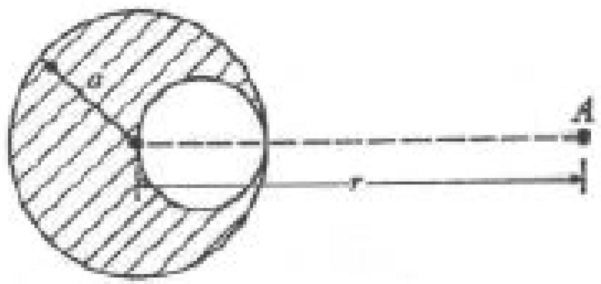
2. El integral sale directo a una expresión algebraica que contiene E.

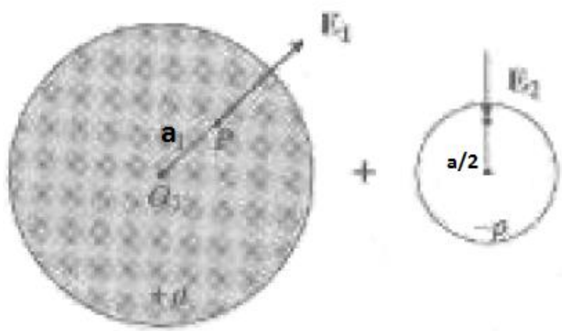
3. Calcular Q_N (en la región de interés).
   - Q_N Es lo que distingue cada situación y cada región.
   - Q_N Es <u>diferente</u> en cada región.
   - A veces hay que calcular la densidad de carga. Q_N es el producto de densidad por el volumen de carga <u>dentro</u> de la superficie.

4. Resolver por E algebraicamente.

2.10 Aplicación de la ley de Gauss

Una ***esfera no conductora*** de radio a con una densidad de carga uniforme ρ tiene una ***cavidad*** esférica como se muestra en la siguiente figura, calcule el campo eléctrico en el punto A.





Utilizando el principio de superposición, se tiene que

$$E_A = E_{Esfera} + E_{Cavidad}$$

Aplicando la ley de Gauss

2.10 Aplicación de la ley de Gauss

Aplicando la ley de Gauss

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc.}}{\varepsilon_0}$$

para la esfera no conductora, como $\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{s}$ se tiene

$$\oiint E ds = \frac{q_{Esfera}}{\varepsilon_0}$$

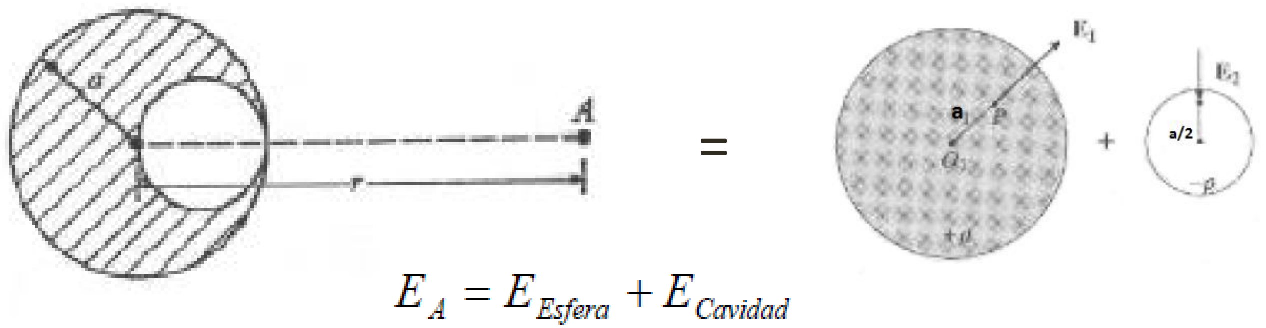
dado que $E = \left|\vec{E}\right| = Cte$ sobre todos los puntos de la superficie Gaussiana, entonces

$$E \oiint ds \equiv E 4\pi r^2 = \frac{q_{Esfera}}{\varepsilon_0}$$

de donde:

$$E_{Esfera} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_{Esfera}}{r^2}$$

2.10 Aplicación de la ley de Gauss



$$E_A = E_{Esfera} + E_{Cavidad}$$

$$q_{Esfera} = \rho \upsilon_{Esfera} = \rho 4\pi a^3 / 3$$

$$q_{Cavidad} = -\rho \upsilon_{Cavidada} = -\rho 4\pi (a/2)^3 / 3$$

Entonces:

$$E_{Esfera} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{\rho a^3}{r^2} \qquad E_{Cavidad} = -\frac{1}{24\varepsilon_0} \frac{\rho a^3}{(r - a/2)^2}$$

2.10 Aplicación de la ley de Gauss

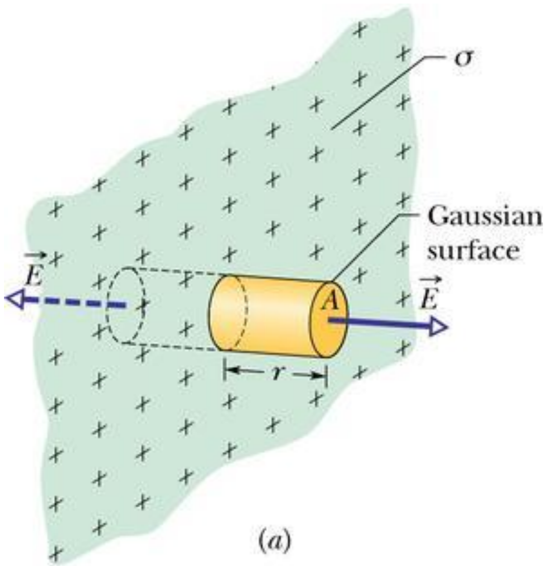
Entonces: $E_A = E_{Esfera} + E_{Cavidad}$

Sustituyendo ambos campos (esfera y cavidad) en E_A, se encuentra

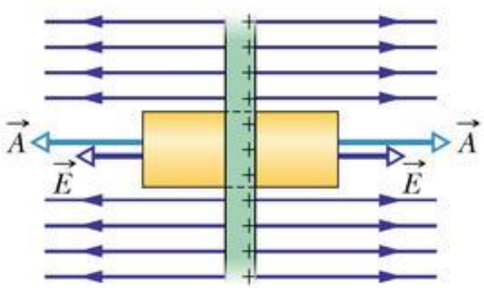
$$E_{Esfera} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{\rho a^3}{r^2} \qquad E_{Cavidad} = -\frac{1}{24\varepsilon_0}\frac{\rho a^3}{(r-a/2)^2}$$

$$E_A = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{8(r-a/2)^2}\right)$$

Aplicación de la Ley de Gauss
Simetría Plana



(a)



(b)

La única dirección especificada por la situación física es la dirección perpendicular al plano. Por tanto, ésta tiene que ser la dirección de E.

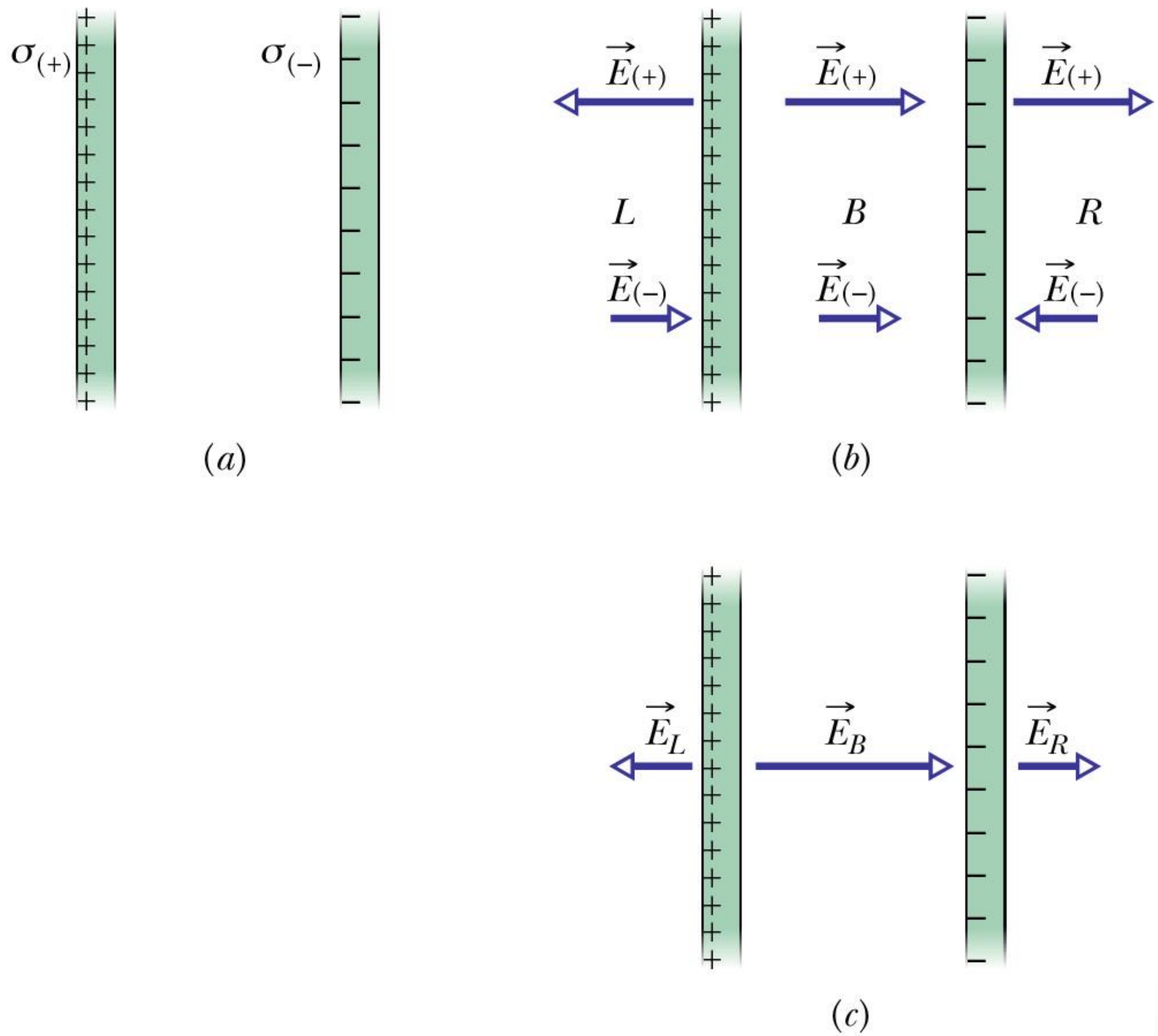
Puntos que quedan en planos paralelos están equidistantes al plano y tienen un campo E de la misma magnitud

La superficie Gaussiana que usamos tiene tapas que son dos de esos planos paralelos. El flujo a través de la superficie Gaussiana es cero. Los flujos a través de las dos tapas son iguales.

$$\epsilon_0(EA + EA) = \sigma A,$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Ejemplo

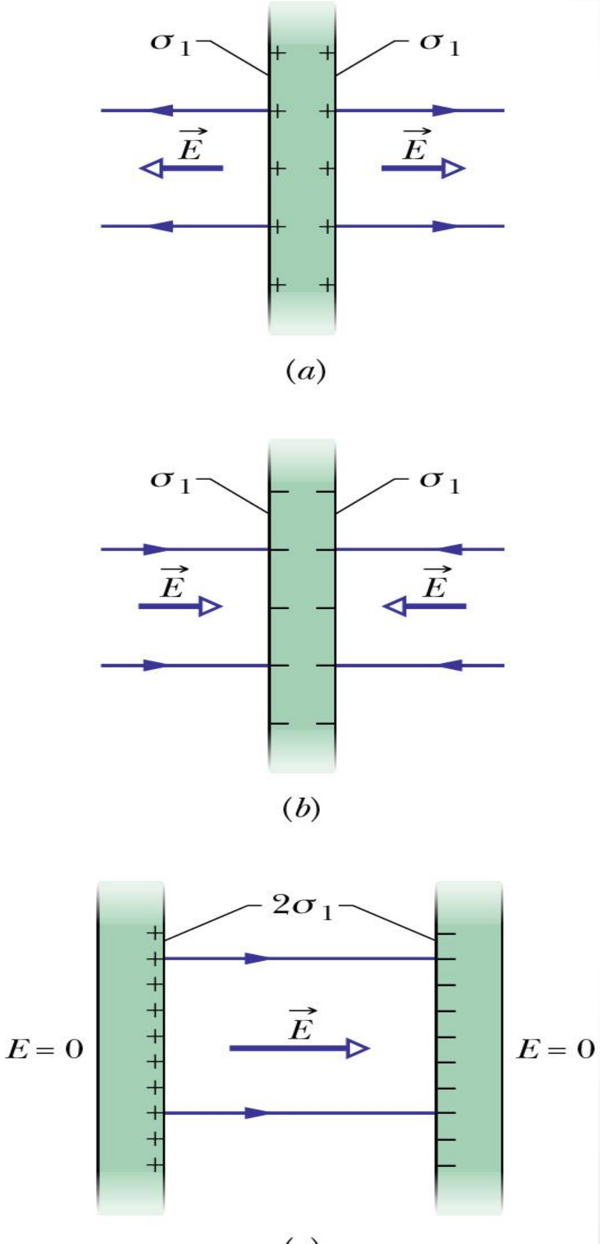


$\sigma_{(+)}$
$\sigma_{(-)}$
(a)
$\vec{E}_{(+)}$
$\vec{E}_{(+)}$
$\vec{E}_{(+)}$
L
B
R
$\vec{E}_{(-)}$
$\vec{E}_{(-)}$
$\vec{E}_{(-)}$
(b)
$\vec{E}_L$
$\vec{E}_B$
$\vec{E}_R$
(c)

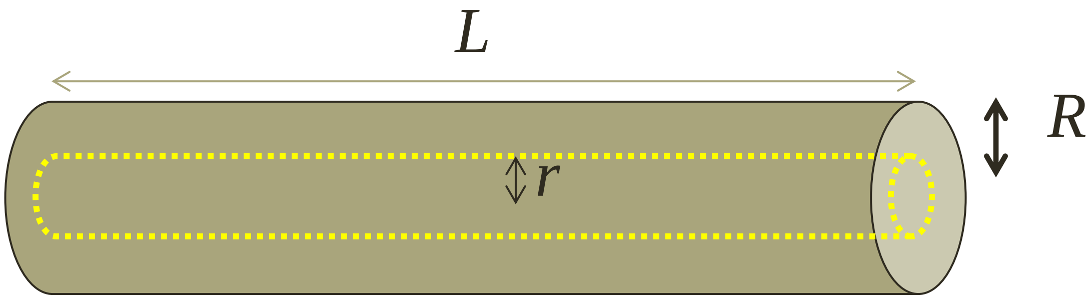
Dos placas conductoras:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_T = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$



Cilindro Cargado



Encontrar el campo eléctrico en el interior del cilindro

- Cilindro de longitud infinita, radio *R* y densidad de carga ρ
- El campo eléctrico tiene dirección perpendicular al eje del cilindro.

$$\Phi = AE = 2\pi rLE = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{V\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\pi r^2 \rho L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{r\rho}{2\varepsilon_0}$$

3 Energía Potencial

En un sistema físico, la energía potencial es energía que mide la capacidad que tiene dicho sistema para realizar un trabajo en función exclusivamente de su posición o configuración. Puede pensarse como la energía almacenada en el sistema, o como una medida del trabajo que un sistema puede entregar.

La energía potencial puede presentarse como energía potencial gravitatoria, energía potencial electrostática, y energía potencial elástica.

3 Energía Potencial

- La energía potencial es una magnitud escalar asociada a un campo de fuerzas

- Cuando la energía potencial está asociada a un campo de fuerzas, la diferencia entre los valores del campo en dos puntos A y B es igual al trabajo realizado por la fuerza para cualquier recorrido entre B y A.

3 Energía Potencial

Si las fuerzas internas realizan un trabajo positivo, el sistema gasta energía potencial, entonces $U_f < U_i$

$$U_f - U_i = -W_{\text{int}}$$

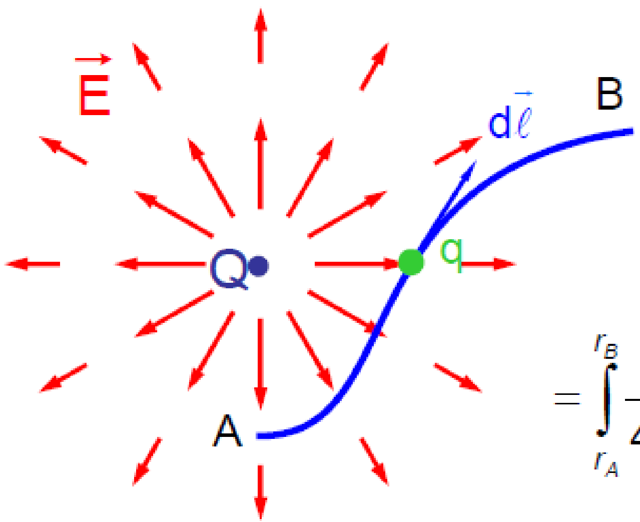
Energía potencial del sistema en su estado inicial

Energía potencial del sistema en su estado final

Trabajo realizado por las fuerzas internas del sistema durante el cambio de estado de éste

3.1 Potencial Eléctrico

Trabajo realizado por el campo electrostático



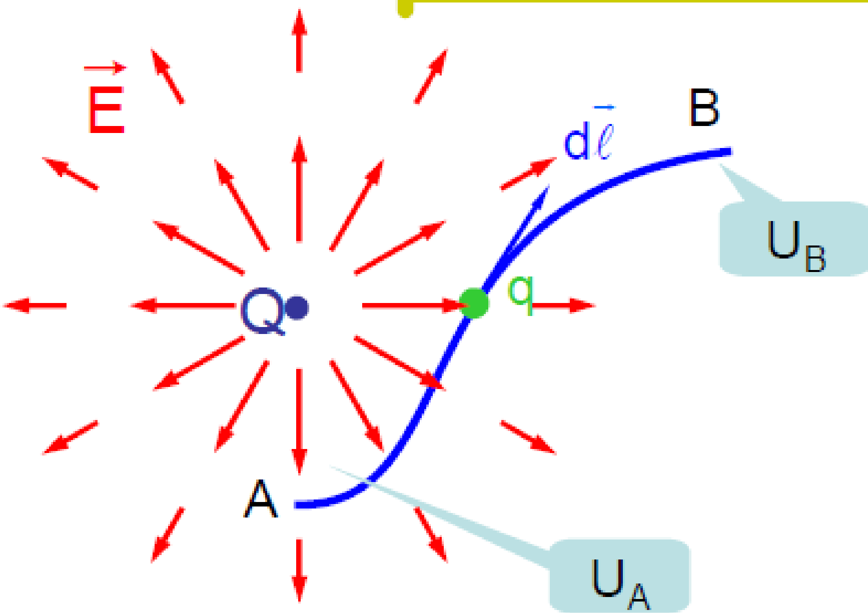
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\ell} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$W_{A \to B} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

3.1 Potencial Eléctrico

Campo eléctrico es un campo conservativo



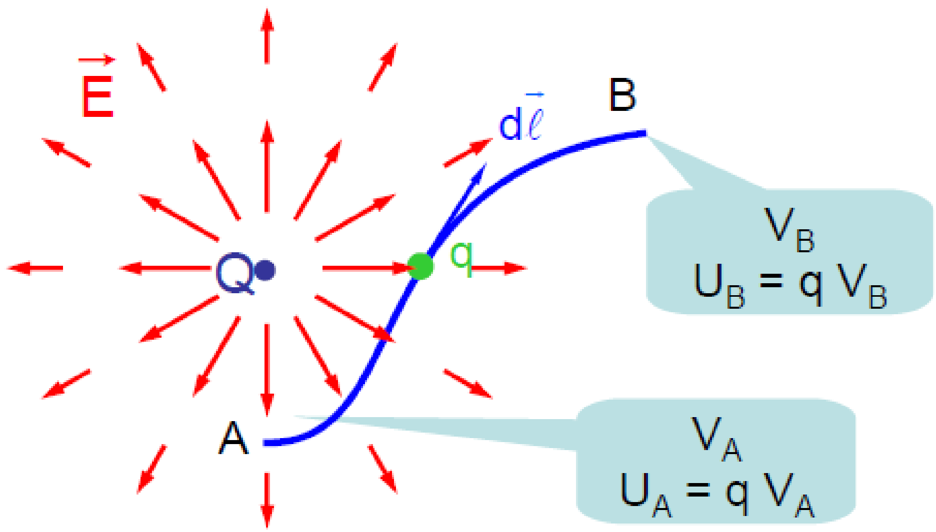
$$W_{AB} = -(U_B - U_A) = -\Delta U$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

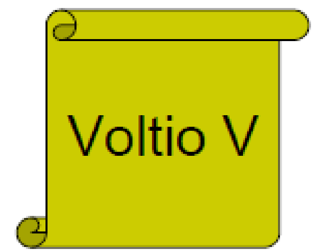
Julio J

$$W_{AB} = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

3.1 Potencial Eléctrico



$$V = \frac{U}{q}$$



$$W_{AB} = -\Delta U = -q\left(V_B - V_A\right)$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -q\left(V_B - V_A\right)$$

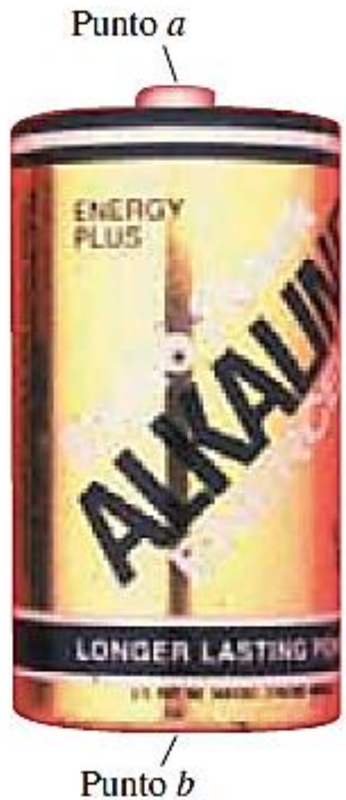
$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{V_A}^{V_B} dV$$

El Potencial Eléctrico V en un punto en el espacio se define como la energía potencial por unidad de carga en el punto.

La unidad es el J/c. esta unidad recibe el nombre de voltio V

3.1 Potencial Eléctrico

El voltaje de esta batería es igual a la diferencia de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ entre su terminal positiva (punto a) y su terminal negativa (punto b).



$V_{ab} = 1.5$ volts

llama **volt** (1 V) en honor del científico italiano y experimentador eléctrico Alejandro Volta (1745-1827), y es igual a 1 joule por coulomb:

$$V = \frac{W}{q}$$

Unidades:
[V]=[W]/[q]= J/c = VOLTIOS (V)
1 voltio = 1 Joule/coulomb

3 Energía Potencial

El electrón-Volt

La cantidad de trabajo necesaria para mover la carga de un electrón $(e = 1.602\times10^{-19}\,[\mathrm{C}])$, a través de una diferencia de potencial de 1 [Volt], recibe el nombre de electrón-Volt.

$$1 \text{ electrón-Volt} = 1.602\times10^{-19}\ [\mathrm{C}]\times 1\ [\mathrm{V}]$$

$$1[eV] = 1.6\times10^{-19}[J]\ .$$

Algunos múltiplos del electrón volt son:

$$1 \text{ kiloelectrón Volt} = 1[keV] = 10^{3}\,[eV]$$

$$1 \text{ Megaelectrón Volt} = 1[MeV] = 10^{6}\,[eV]$$

$$1 \text{ Gigaelectrón Volt} = 1[GeV] = 10^{9}\,[eV]$$

3.2 Relación entre Campo Eléctrico Potencial Eléctrico

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

El Potencial necesita una referencia (o bien usamos una diferencia de potencial)

Apliquemos la definición al caso de una carga puntual

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \hat{a}_r \quad \Rightarrow \quad V(r) - \cancel{V(r = \infty)} = -\int_{r=\infty}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_{r=\infty}^{r} E \cdot dr$$

0

$$= -\int_{r=\infty}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dr$$

Podemos elegir el origen de potenciales en el infinito

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

3.2 Relación entre Campo Eléctrico Potencial Eléctrico

- Vamos a suponer una región del espacio en la que existe un campo eléctrico, representado por sus líneas de campo. El trabajo necesario para desplazar una carga de prueba, q_o, una distancia infinitesimal a la largo de una de estas líneas será

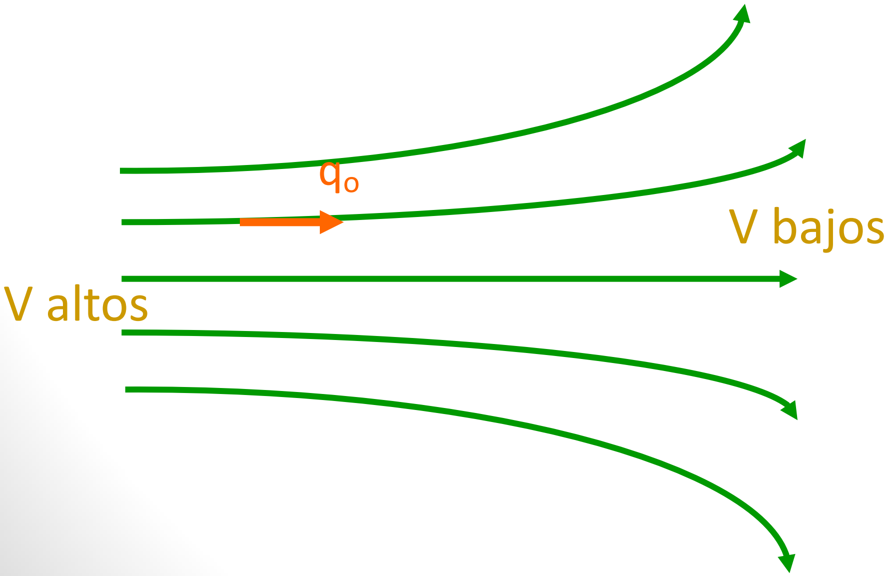
$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- En términos de incrementos

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} \begin{cases} \Delta\vec{r} \text{ perpendicular a } \vec{E} \Longrightarrow \Delta V = 0 \Longrightarrow \text{V constante} \\ \Delta\vec{r} \text{ paralelo a } \vec{E} \Longrightarrow \text{Variación máxima de potencial} \end{cases}$$

3.2 Relación entre Campo Eléctrico Potencial Eléctrico

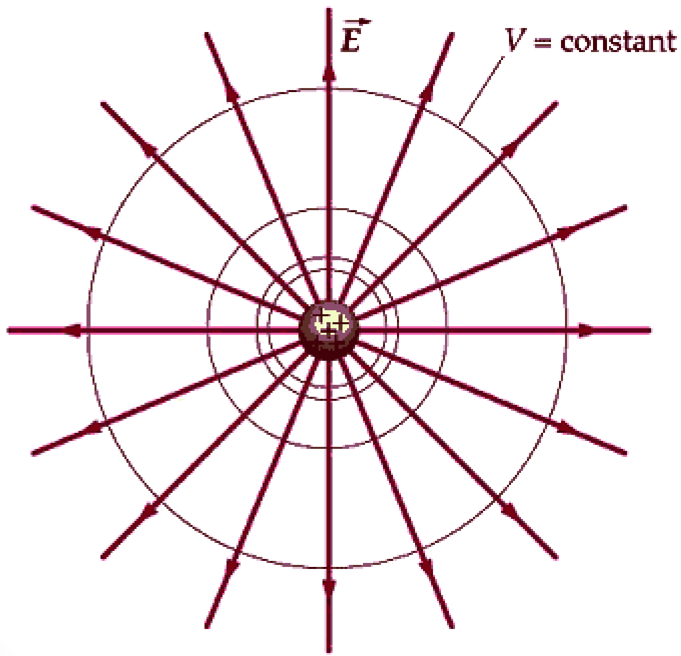
- Si dejamos en libertad una carga de prueba bajo la acción de un campo eléctrico, esta se acelerará en el sentido de dicho campo a lo largo de las líneas de fuerza.
- El hecho de que se acelere hace que aumente su energía cinética, con lo cual, su energía potencial debe disminuir. Esto quiere decir que **las líneas de campo señalan en la dirección en la que disminuye el potencial eléctrico.**

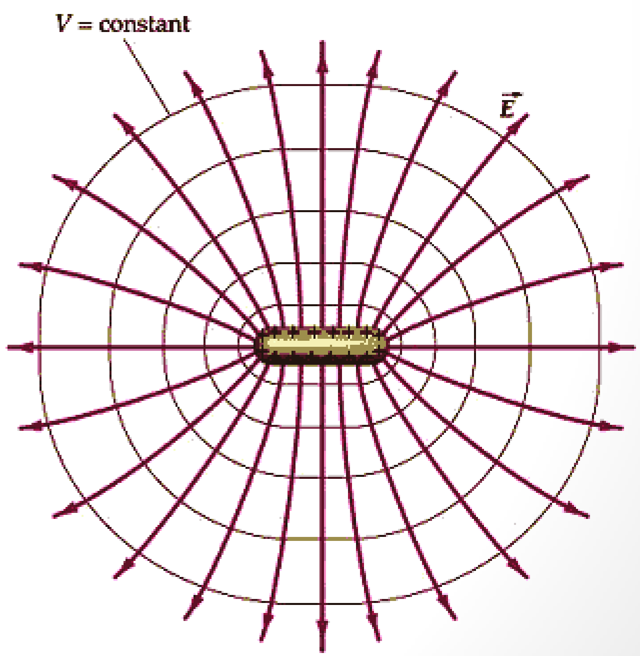


Visto en términos del gradiente, ya que su significado físico es la dirección de máxima variación de la función, el signo menos indica sentido decreciente del potencial.

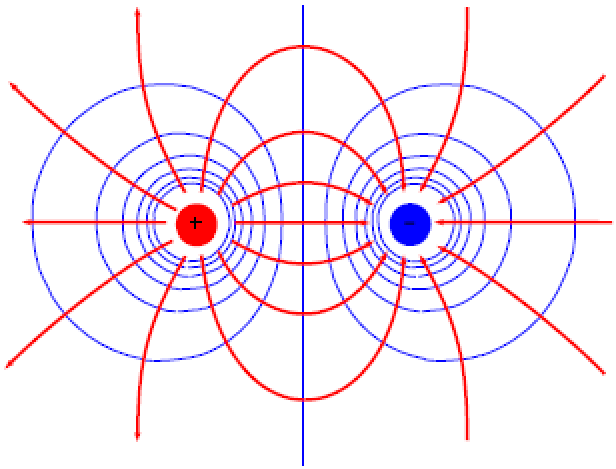
3.3 Calculo del Potencial Eléctrico

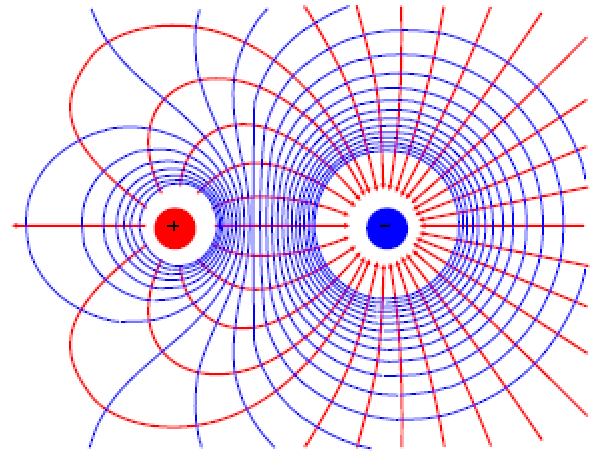
Todos los puntos de un campo eléctrico que tienen el mismo potencial forman una superficie equipotencial, esta se da debido a que el potencial eléctrico es de naturaleza escalar.

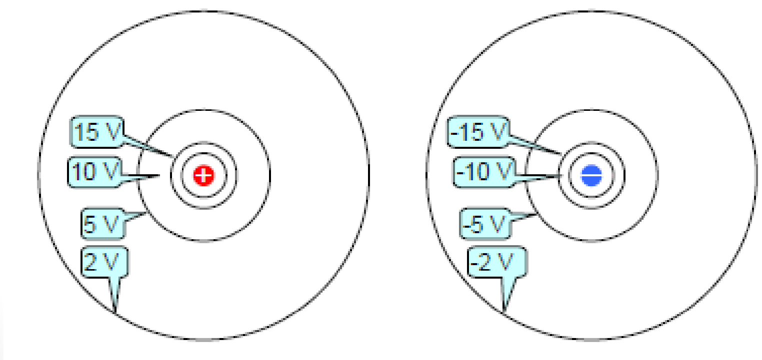


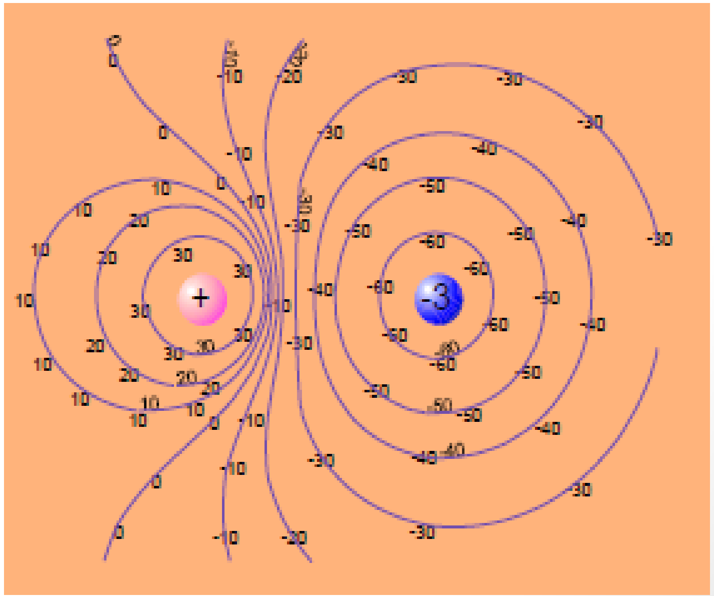


3.3 Calculo del Potencial Eléctrico



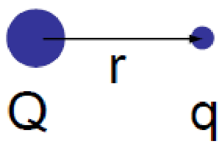






3.3 Calculo del Potencial Eléctrico

Potencial creado por una carga puntual



$$U = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad V = \frac{U}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Potencial creado por *n* cargas puntuales

$$V = \sum V_i = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho dv}{R} \left[= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma dS}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{R} \right]$$

Cálculo directo del potencial eléctrico en el caso de distribuciones continuas de carga.

3.3 Calculo del Potencial Eléctrico

Existen dos métodos para calcular el potencial eléctrico asociado a una distribución continua de cargas:

I Conocido el campo eléctrico creado por la distribución

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En este caso debemos tomar como origen de potenciales un punto de referencia arbitrario.

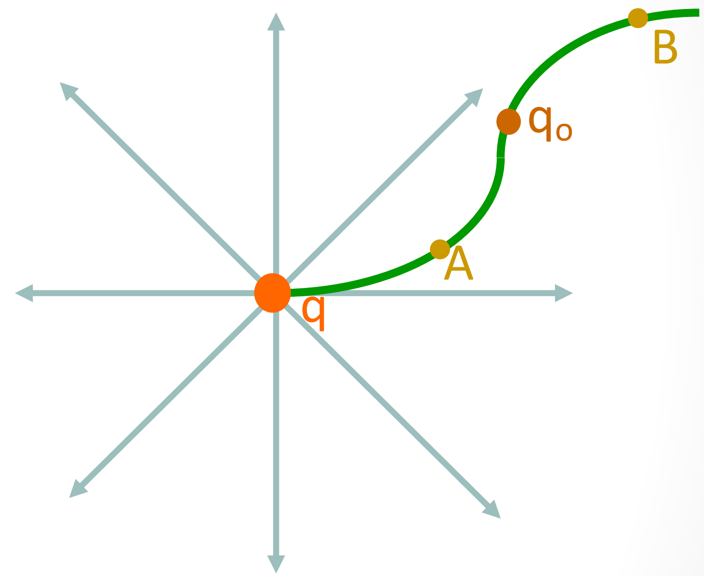
II Para el caso de distribuciones finitas de carga, para las cuales podemos suponer que $V(\infty)=0$. En este caso

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

3.3 Calculo del Potencial Eléctrico

Se puede calcular el potencial de una carga puntual a partir del campo eléctrico que produce.

I.- Calculemos el *trabajo realizado por el campo* para desplazar la carga desde el punto A al punto B



$$\underbrace{\cancel{V(B)}}_{0} - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$-V(r) = -\int_r^{\infty} k\frac{q}{r^2}\,dr = kq\frac{1}{r}$$

$$V(r) = k\frac{q}{r}$$

Tomando como origen la carga y asumimos un punto de estudio en el infinito,

podemos identificar el punto B= ∞ y A= r

3.3 Calculo del Potencial Eléctrico

II.- Un método alternativo es calcular el trabajo que debe realizar una fuerza exterior para traer una carga desde el infinito hasta un punto r. En este caso el punto A coincide con el infinito.

$$W_{AB}^{ext} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V(B) - \underbrace{V(A)}_{0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r k \frac{q}{r^2} dr$$

$$V(r) = k\frac{q}{r}$$

La energía potencial de una carga q_o situada a una distancia r de q, será

$$\Rightarrow U = q_o V = k\frac{q q_o}{r}$$

La energía potencial de un sistema de cargas puntuales será el trabajo necesario para llevar cada una de ellas desde el infinito hasta su posición final.

Sistema Discreto

Un positrón (antipartícula del electrón) tiene una masa de $9.11\,x10^{-31}$ kg y una carga $+e = 1.6\,x10^{-19}$ C. Suponga que un positrón se mueve en la vecindad de una partícula alfa cuya carga es $+2e = 3.2\,x10^{-19}$ C. La partícula alfa tiene una masa más de 7000 veces mayor que la del positrón, por lo que se supondrá que está en reposo en algún marco de referencia inercial. Cuando el positrón está a $1x10^{-10}$ m de la partícula alfa, se aleja de ésta con una rapidez de $3\,x10^{6}$ m/s.

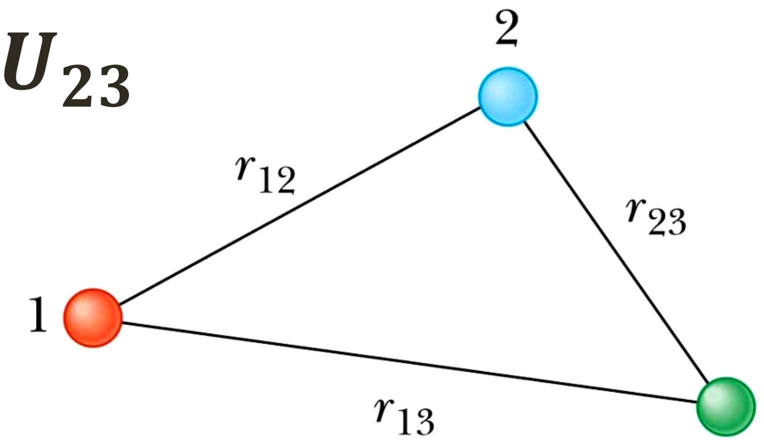
a) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando las dos partículas están separadas por una distancia de $2x10^{-10}$ m?

b) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando está muy alejado de la partícula alfa?

- La energía potencial de un sistema de cargas es la suma de las energías potenciales que aparecen de cada par de cargas. A este principio se llama Principio de Superposición

$$U_{total} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

$$= K\left[\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}}\right]$$

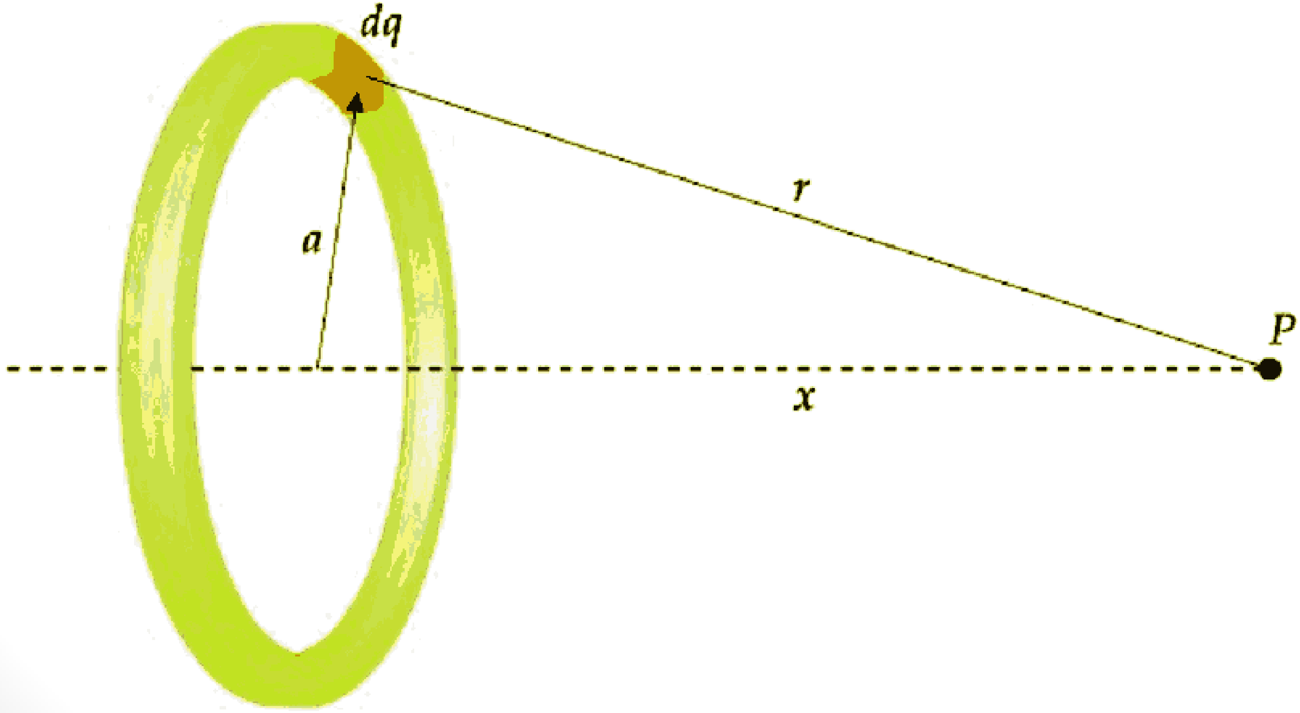


Sistema continuo

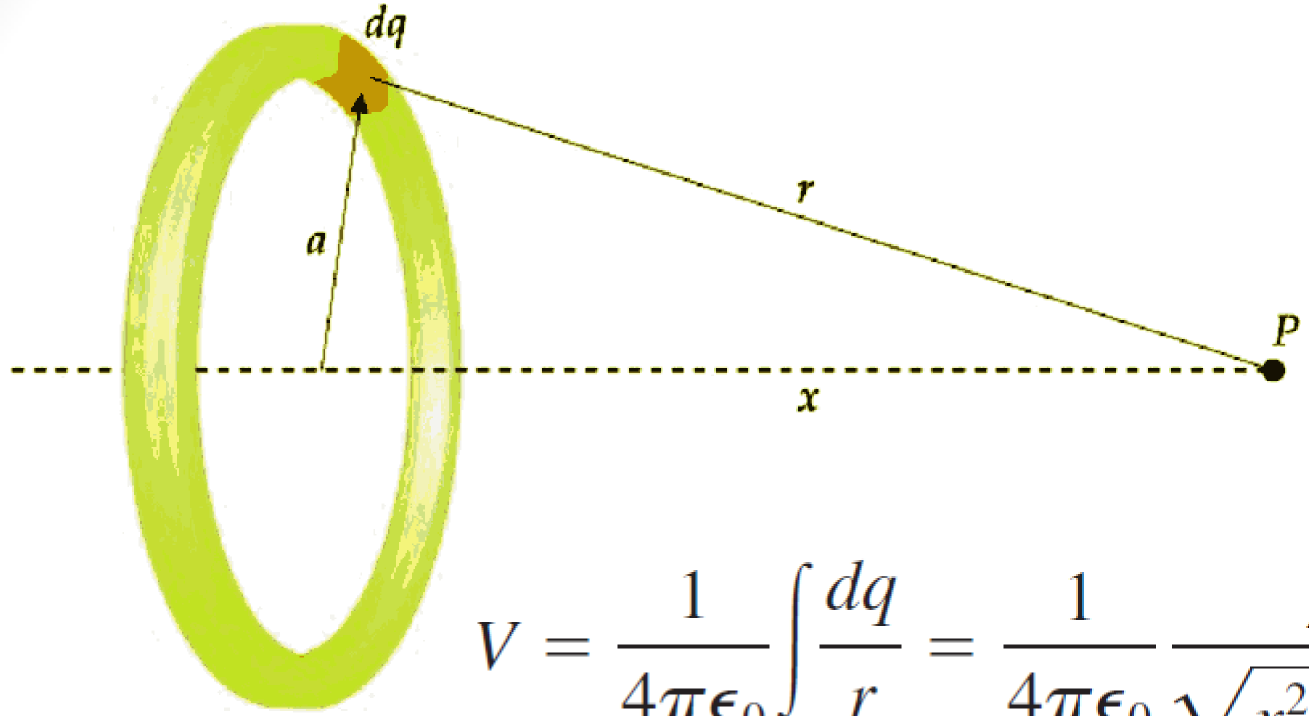
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho dv}{R} \left[= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma dS}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{R} \right]$$

Cálculo directo del potencial eléctrico en el caso de distribuciones continuas de carga.

Ejemplo 1.- Potencial eléctrico sobre el eje de un anillo cargado.



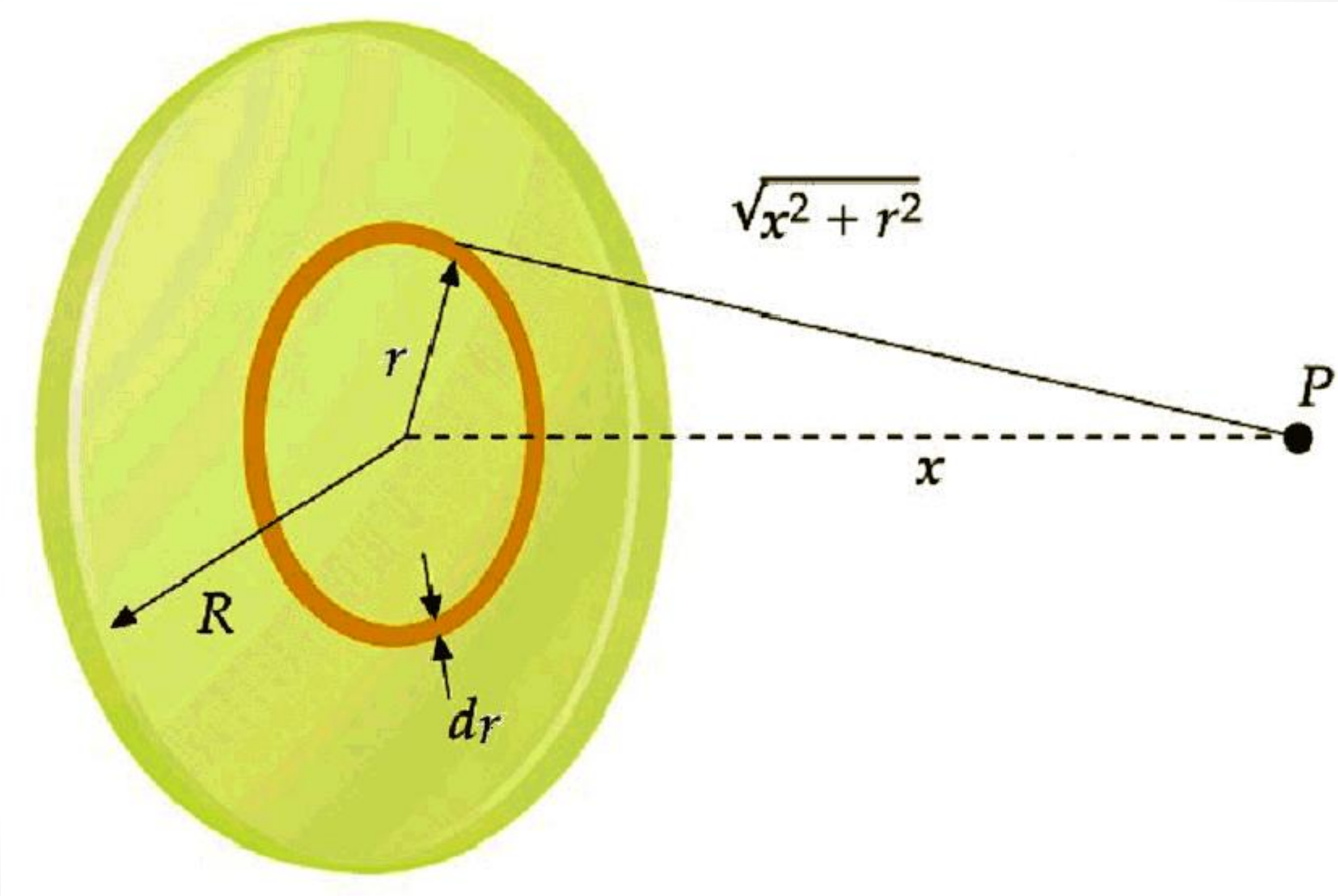
Ejemplo 1.- Potencial eléctrico sobre el eje de un anillo cargado.



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+a^2}}\int_0^{2\pi} a\,d\phi$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi a\lambda}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Ejemplo 2.- Potencial eléctrico sobre el eje de un disco uniformemente cargado.



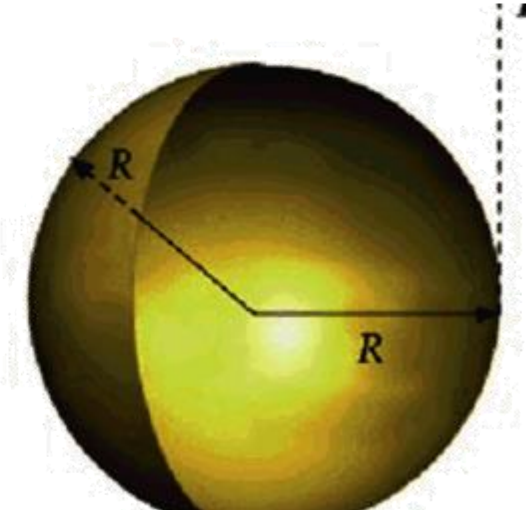
Ejemplo 2.- Potencial eléctrico sobre el eje de un disco uniformemente cargado.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi r\sigma dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{2\pi r\,dr}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0}\,2\sqrt{x^2+r^2}\Big]_0^R$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2} - x\right]$$

Ejemplo 3.- Potencial eléctrico en el interior y el exterior de una corteza esférica de carga.



$$V(B) - \underbrace{V(A)}_{0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r k\frac{q}{r^2}dr$$

Para puntos exteriores, es decir: $r \geq R$, el campo eléctrico es :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} .$$

Luego,

$$V_P = -\int_\infty^r \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_\infty^r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

Ejemplo 3.- Potencial eléctrico en el interior y el exterior de una corteza esférica de carga.

$$V(B) - \underbrace{V(A)}_{0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r k \frac{q}{r^2} dr$$

Para puntos interiores, $r < R$, el campo eléctrico es nulo. Usando la trayectoria radial para determinar el potencial en un punto interior, se tendrá:

$$V_P = -\int_\infty^r \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = -\int_\infty^R \vec{E} \bullet d\vec{\ell} - \int_R^r \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = -\int_\infty^R \vec{E} \bullet d\vec{\ell},$$

puesto que $\vec{E} = 0$ para $r < R$.

Luego, en un punto interior de la esfera hueca, el potencial tiene un valor constante igual a:

$$V_P = -\int_\infty^R \vec{E} \bullet dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

De otra manera, la carga se movería dentro de la esfera. De esta forma, si una carga de prueba se desplaza de un punto a otro en el interior de la esfera, no se efectúa ningún trabajo sobre la carga. Esto significa que el potencial es el mismo en todos los puntos del interior de la esfera y es igual a su valor en la superficie.

Ejemplo 3.- Potencial eléctrico en el interior y el exterior de una corteza esférica de carga.

Magnitud del campo eléctrico E y el potencial V en puntos dentro y fuera de una esfera conductora con carga positiva.