Instituto Tecnológico Metropolitano ITM

4.4 ENERGÍA DE UN CONDENSADOR

Cuando se carga un condensador con una batería, ésta realiza un trabajo al transportar los portadores de carga de una placa a otra.

Esto supone un aumento de energía potencial en los portadores que coincide con la **energía eléctrica almacenada en el condensador**. Se puede comparar este efecto con la energía almacenada en un resorte comprimido. Esta energía almacenada se recupera cuando se descarga el condensador.

Si en un tiempo t se transfiere una carga q’(t) de una placa a otra, la dq en este instante de tiempo será

$$V(t) = \frac{q'(t)}{C}$$

La transferencia de una carga extra dq’, requiere un trabajo extra que vendrá dado por

$$dW = V(t)dq' = \frac{q'}{C}dq'$$

El proceso termina cuando toda la carga ha sido transferida y el sistema queda en equilibrio. El trabajo desarrollado en este proceso será

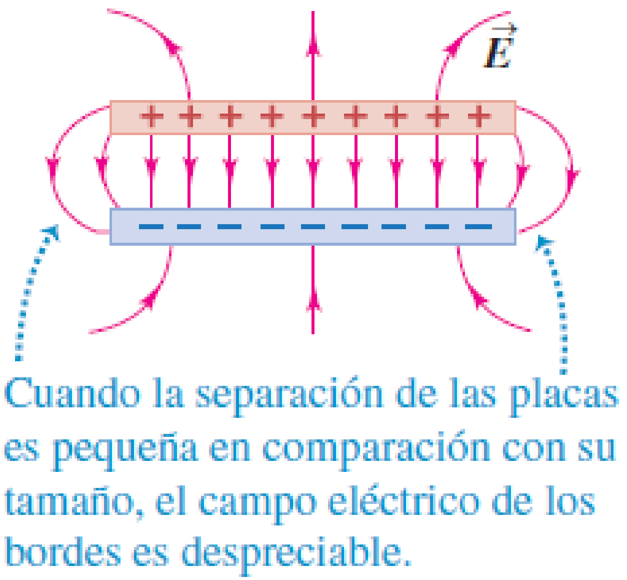
$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}dq'$$

$$1\ \mathrm{F} = 1\ \mathrm{C^2/N \cdot m} = 1\ \mathrm{C^2/J}$$

Este trabajo coincide con la energía eléctrica almacenada en el condensador, luego

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

También se puede escribir como $U = \frac{1}{2}CV^2$ o $U = \frac{1}{2}qV$



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

El campo es uniforme y la distancia entre las placas es *d*, por lo que la diferencia de potencial (voltaje) entre las dos placas es

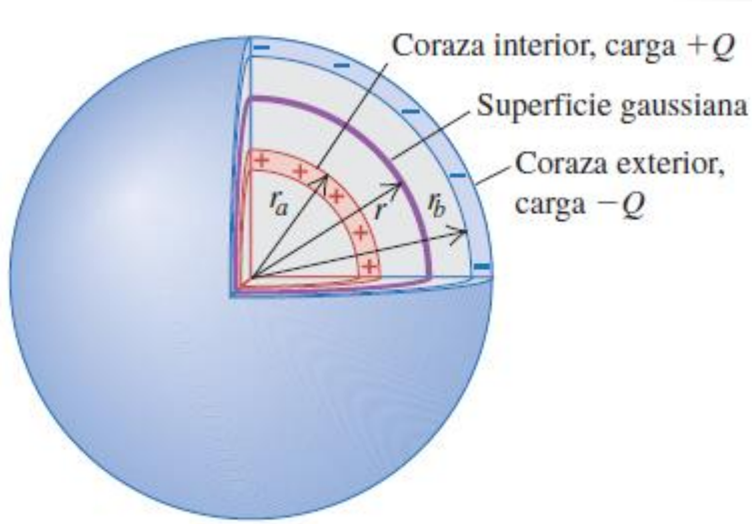
$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Qd}{A}$$

A partir de esto se observa que la capacitancia *C* de un capacitor de placas paralelas con vacío es

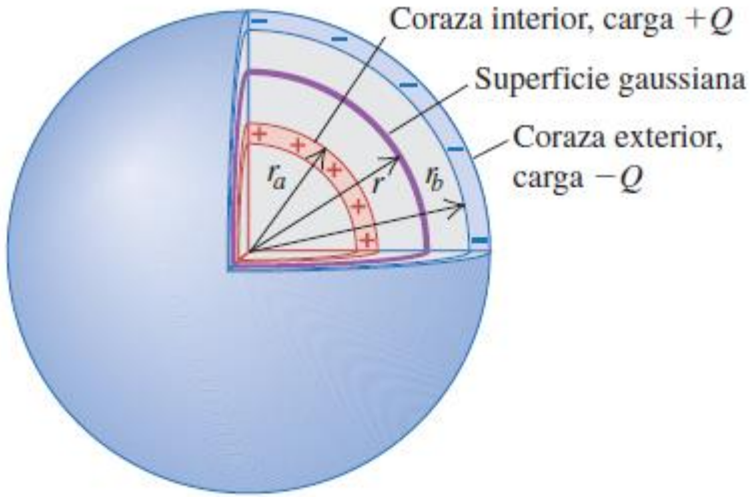
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad \text{(capacitancia de un capacitor de placas paralelas en el vacío)}$$

Capacitor esférico

Dos corazas conductoras esféricas y concéntricas están separadas por vacío. La coraza interior tiene una carga total 1Q y radio exterior r_a, y la coraza exterior tiene carga 2Q y radio interior r_b . (La coraza interior está unida a la coraza exterior mediante delgadas varillas aislantes que tienen un efecto despreciable sobre la capacitancia.) Determine la capacitancia del capacitor esférico.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$



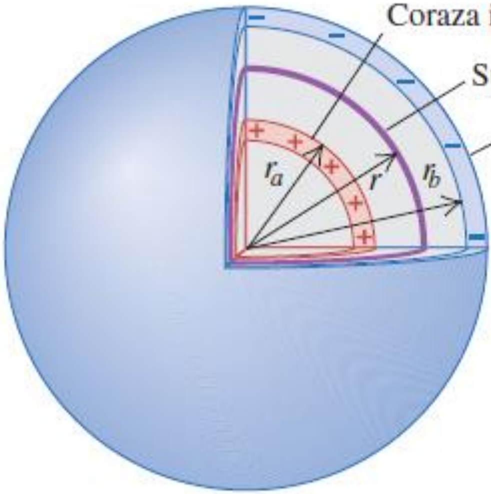
$$(E)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

La expresión anterior para E es la misma que la correspondiente a una carga puntual Q, por lo que la expresión para el potencial también puede tomarse como la misma que la correspondiente a una carga puntual, $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$. De ahí que el potencial del conductor interior (positivo) en $r = r_a$ con respecto al del conductor exterior (negativo) en $r = r_b$ es

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$



Por último, la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

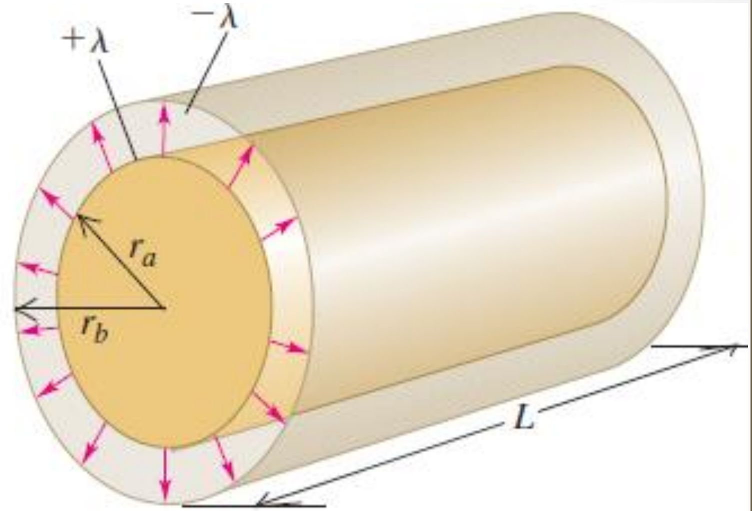
Como ejemplo, si $r_a = 9.5$ cm y $r_b = 10.5$ cm,

$$C = 4\pi(8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m})\frac{(0.095\ \mathrm{m})(0.105\ \mathrm{m})}{0.010\ \mathrm{m}}$$

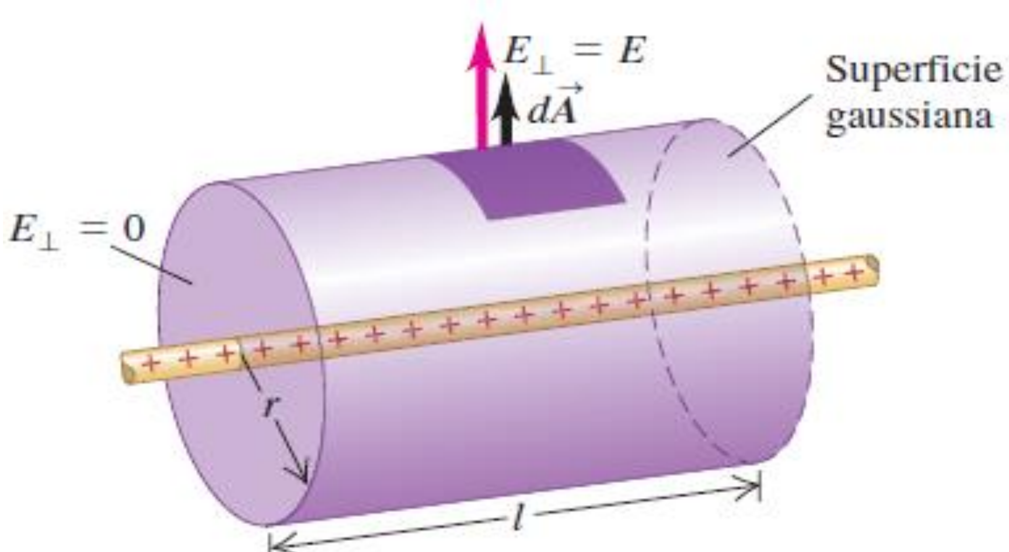
$$= 1.1 \times 10^{-10}\ \mathrm{F} = 110\ \mathrm{pF}$$

Capacitor cilíndrico

Un capacitor cilíndrico largo. En esta figura la densidad carga lineal de se supone positiva. La magnitud de carga en una longitud *L* de cualquier cilindro es *lL*.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\mathrm{enc}}}{\epsilon_0}$$



$$\Phi_E = (E)(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

Esta expresión se utiliza para obtener el potencial por integración de $\vec{E}$.

Como el campo sólo tiene una componente radial, el producto escalar $\vec{E}\cdot d\vec{l}$ es igual a $E_r dr$. Así, el potencial de cualquier punto a con respecto a cualquier otro punto b, a distancias radiales r_a y r_b de la línea de carga, es

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$

La carga total Q en una longitud L es $Q = \lambda L$, por lo que, la capacitancia C de una longitud L es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \dfrac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \left(r_b / r_a \right)}$$

Densidad de energía: Se define como la cantidad de energía por unidad de volumen.

Para un condensador de placas planoparalelo

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{d} \quad y \quad V = E d$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_o A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_o E^2 (Ad)$$

Volumen ocupado por el campo eléctrico

Si en un punto del espacio (en vacío) existe un campo eléctrico, puede pensarse que también hay almacenada una cantidad de energía por unidad de volumen igual a esta expresión

$$\eta_e = \frac{1}{2} \varepsilon_o E^2$$

4.5 CONDENSADOR PLANOPARALELO CON DIELÉCTRICO

En 1837 Faraday investigó por primera vez el efecto de llenar el espacio entre las placas de un condensador con un dieléctrico (material no conductor), descubriendo que en estos casos la capacidad aumenta.

Si el dieléctrico ocupa todo el espacio entre las placas, la capacitancia aumenta en un factor κ, a la que llamamos **Constante Dieléctrica**.

4.6 Dieléctrico entre las placas de un Condensador

Dado un condensador planoparalelo de capacitancia C_o, se conecta a una pila con una diferencia de potencial V_o, de forma que la carga final que adquiere es $q_o = C_oV_o$.

I

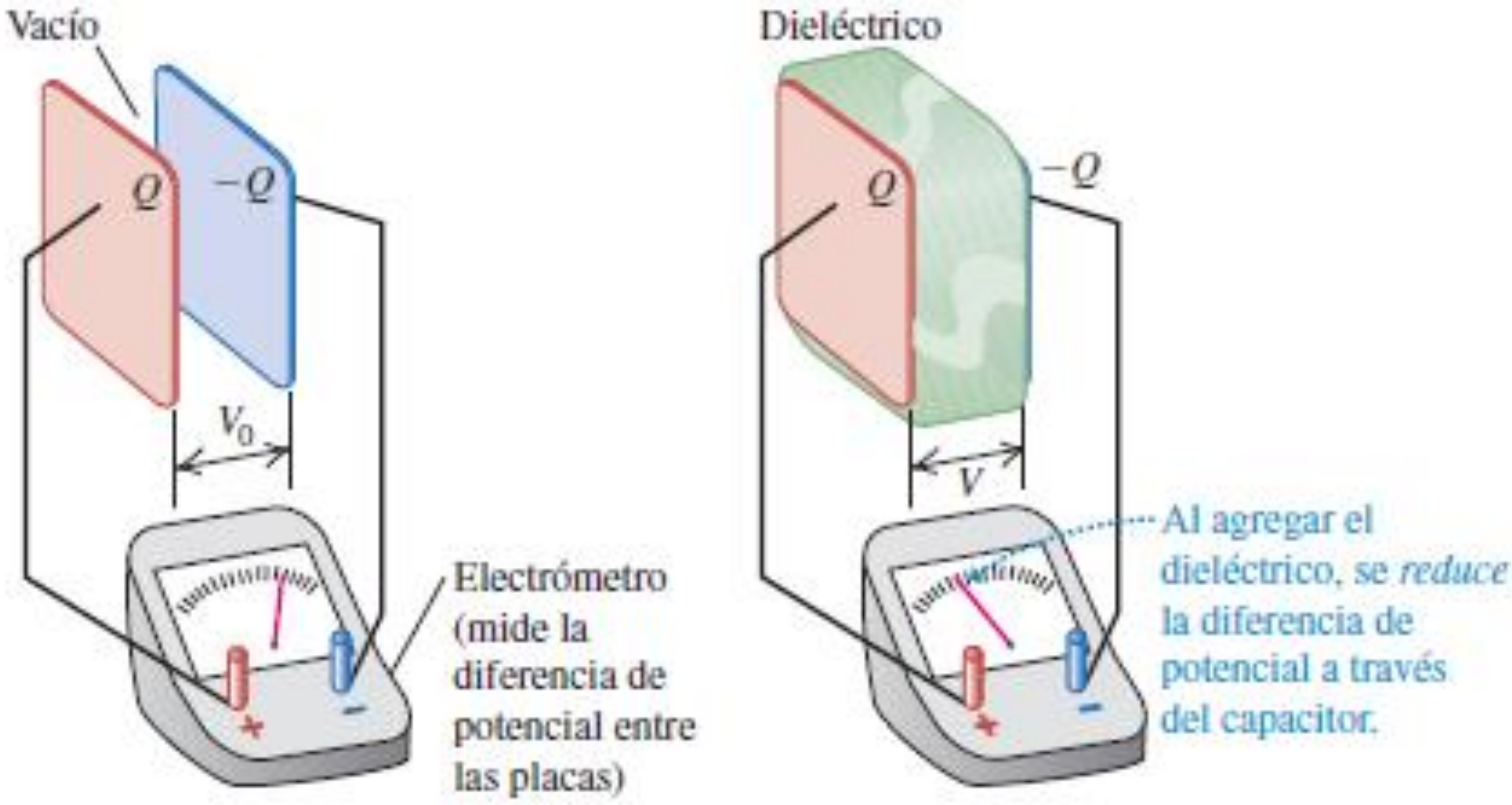
Si se desconecta el condensador de la pila y se introduce un dieléctrico que ocupe todo el espacio entre las placas, la campo disminuye en una cantidad **κ,** mientras que la carga permanece constante, luego

$$C = \frac{q_o}{V} = \frac{\kappa q_o}{V} = \kappa C_o$$

II

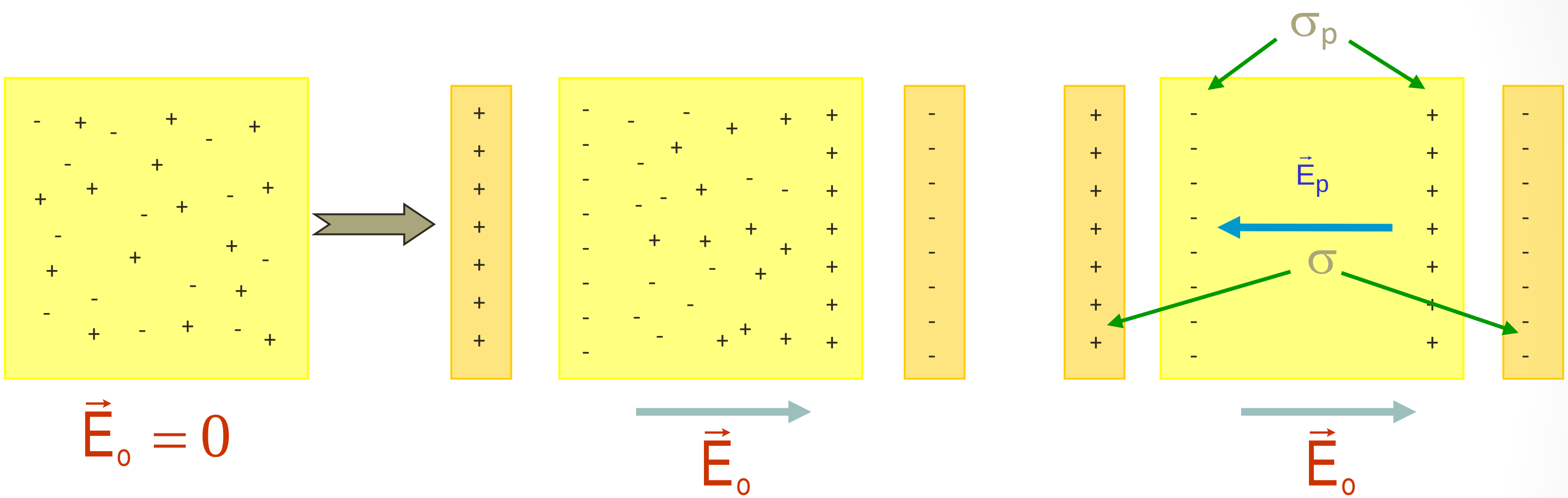
Si se introduce un dieléctrico con la pila conectada, ésta debe suministrar una carga adicional para mantener el potencial constante. La carga total aumenta entonces en una cantidad **κ**, luego

$$C = \frac{q}{V_o} = \frac{\kappa q_o}{V_o} = \kappa C_o$$



Vacío
Q
$-Q$
V_0
+
−
Electrómetro (mide la diferencia de potencial entre las placas)
Dieléctrico
Q
$-Q$
V
+
−
Al agregar el dieléctrico, se *reduce* la diferencia de potencial a través del capacitor.

Si colocamos un dieléctrico entre las placas de un condensador planoparalelo, se polariza a medida que se introduce en el interior del condensador, Aparece una densidad superficial de carga en las caras adyacentes a las placas del condensador



El campo eléctrico total es, en este caso

$$\vec{E} = E_o \vec{i} + E_p(-\vec{i})$$

En módulo, el campo total disminuye

$$E = E_o - E_p$$

Para un condensador de placas planoparalelas se puede escribir

$$C = \frac{\kappa \varepsilon_o A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

Este resultado se puede generalizar para cualquier tipo de condensador escribiendo

$$C = \kappa \varepsilon_o L$$

L es una constante que depende de la geometría

Planoparalelo $\Rightarrow$ $L = \dfrac{A}{d}$

Cilíndrico $\Rightarrow$ $L = \dfrac{2\pi l}{\ln(b/a)}$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

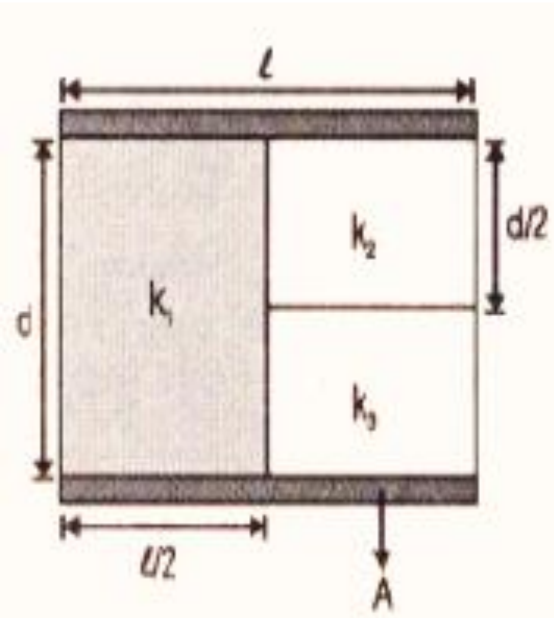
las unidades de ϵ_0 se expresan como $1\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2} = 1\ \mathrm{F/m}$.

Valores de la constante dieléctrica, K, a 20 °C

Material	K	Material	K
Vacío	1	Cloruro de polivinilo	3.18
Aire (a 1 atm)	1.00059	Plexiglás	3.40
Aire (a 100 atm)	1.0548	Vidrio	5–10
Teflón	2.1	Neopreno	6.70
Polietileno	2.25	Germanio	16
Benceno	2.28	Glicerina	42.5
Mica	3–6	Agua	80.4
Mylar	3.1	Titanato de estroncio	310

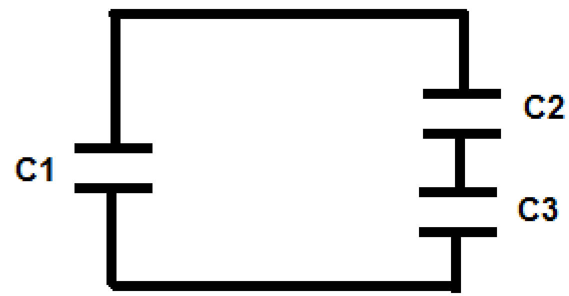
Ejemplos:

Calcule la capacitancia utilizando los valores A = 1,00 cm², d = 2,00 mm, k_1 = 4,90, k_2 = 5,60 y k_3 = 2,10.



Sistema equivalente:

$$C = \frac{k\varepsilon_0 \mathrm{A}}{d}$$



Como el sistema se pierde a la mitad, Solo queda A/2

$$C_1 = \frac{K_1\varepsilon_0 \mathrm{A}}{2d}$$

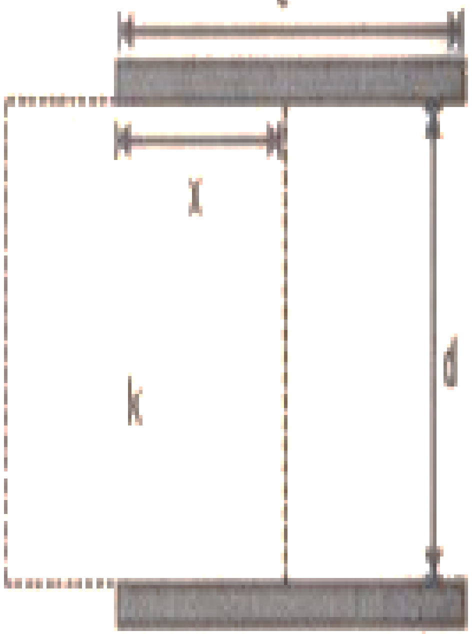
Como el sistema se pierde a la mitad, Solo queda A/2, y la distancia de separación es d/2, se tiene que:

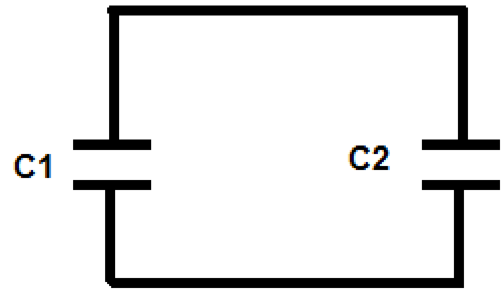
$$C_2 = \frac{K_2\varepsilon_0 \mathrm{A}}{d} \qquad C_3 = \frac{K_3\varepsilon_0 \mathrm{A}}{d}$$

$$C_{Total} = \frac{\varepsilon_0 \mathrm{A}}{d}\left[\frac{K_1}{2} + \frac{K_2 K_3}{K_2 + K_3}\right]$$

Ejemplos:

suponiendo que ℓ = 5,00 cm, ΔV = 2 000 V, d = 2,00 mm, y que el dieléctrico es vidrio (k = 4,50).





$$C_1 = \frac{K\varepsilon_0 LX}{d} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 L(L-X)}{d}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \qquad U = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2(Ad)$$