## 1. IDENTIFICACIÓN DE LA GUÍA

| | |
|---|---|
| ***Nombre de la guía:*** | Momento de Inercia de un cuerpo rígido |
| ***Código de la guía (No.):*** | 012 |
| ***Taller(es) o Laboratorio(s) aplicable(s):*** | Física Mecánica |
| ***Tiempo de trabajo práctico estimado:*** | 2 horas |
| ***Asignatura(s) aplicable(s):*** | Física y laboratorio de física |
| ***Programa(s) Académico(s) / Facultad(es):*** | Ciencias Básicas y aplicadas |

| COMPETENCIAS | CONTENIDO TEMÁTICO | INDICADOR DE LOGRO |
|---|---|---|
| | | |

## 2. FUNDAMENTO TEÓRICO

Considere una partícula de masa *m* la cual se mueve a lo largo de una trayectoria curvilínea con una velocidad $\vec{v}$. Si el vector posición asociado a la partícula respecto a un observador en un punto O del espacio es $\vec{r}_O$, podemos definir entonces el vector momento angular de la partícula respecto al punto O como

$$\vec{L}_O \equiv \vec{r}_O \times \vec{p} = m\left(\vec{r}_O \times \vec{v}\right) \quad (1)$$

Ahora, consideremos un cuerpo rígido en forma de una lámina muy delgada, bajo la condición que el punto por donde pasa el eje de rotación se encuentra ubicado en el cuerpo, como se indica en la figura 1.

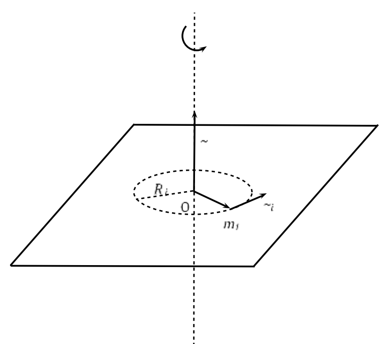


**Figura 1.** Momento angular asociado a un cuerpo rígido respecto a un punto O.

De acuerdo a la figura 1, el momento angular de la partícula *i* se puede escribir como:

$$\vec{L}_i = m\left(\vec{r}_i \times \vec{v}_i\right) \quad (2)$$

dónde: $\vec{v}_i = v_i \hat{u}_T$ y $\vec{r}_i = R_i \hat{u}_r$. Si se calcula explícitamente el producto vectorial, se encuentra que el vector momento angular asociado a la partícula *i* es un vector el cual es paralelo a la velocidad angular del cuerpo rígido y dirigido a lo largo de un eje principal de inercia, esto es:

$$\vec{L}_i = (m_i R_i v_i)\,\hat{\omega} = \left(m_i \omega R_i^2\right)\hat{\omega} = \left(m_i R_i^2\right)\vec{\omega}. \qquad (3)$$

Ahora, podemos calcular el momento angular total del cuerpo rígido si se suman los momentos angulares calculados respecto al eje de rotación de cada una de las partículas que componen el cuerpo, esto es:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\vec{\omega}, \qquad (4)$$

donde el termino entre paréntesis lo vamos a definir como el momento de inercia del cuerpo rígido respecto a un eje principal de inercia, esto es:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \;\; I \equiv \sum_i m_i R_i^2, \qquad (5)$$

donde $R_i$ es la distancia que existe entre el eje de rotación y el punto donde se encuentra la partícula.

Sí suponemos ahora que nuestro cuerpo rígido es una distribución continua de masa, el momento de inercia se puede calcular de la siguiente manera: Consideremos la figura 2, en donde hemos tomado del cuerpo una porción de masa $\Delta m_i$, de tal manera que la contribución de esta porción al momento de inercia total del cuerpo rígido es:

$$\Delta I_i = \Delta m_i r_i^2. \qquad (6)$$

Luego, el momento de inercia total del cuerpo rígido respecto a un punto O será la suma del momento de inercia de todas las porciones de masa que componen el cuerpo cuando la porción de masa $\Delta m_i$ se hace infinitesimal, esto es:

$$I = \lim_{\Delta m_i \longrightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm, \qquad (7)$$

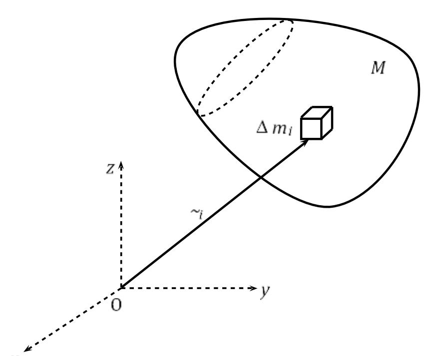

**Figura 2.** Cuerpo rígido como una distribución continua de masa.

donde dm es una cantidad que depende del tipo de distribución de masa continua que se tenga: lineal, superficial o volumétrica. Por ejemplo, para el caso de una varilla de longitud l y masa M, el momento de inercia de la varilla respecto a un eje que pasa por su centro y que es perpendicular a la varilla es:

$$I_{\text{varilla}} = \frac{1}{12} M L^2, \qquad (8)$$

y para un cilindro de radio *R* y masa *M*, el momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro del cilindro y que es perpendicular a sus caras circulares es:

$$I_{\text{cilindro}} = \frac{1}{2} M R^2, \qquad (9)$$

donde este resultado también es válido para un disco de radio *R* respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano del disco.

## 3. OBJETIVO

Calcular el momento de inercia asociado a un sistema formado por un cilindro y un disco (o una barra) respecto a un eje principal

## 4. RECURSOS REQUERIDOS

- Sistema rotante, polea, disparador, disco, barra, dos sensores y contador de tiempos marca PHYWE.
- Soporte universal, dos nueces, flexómetro, calibrador, balanza electrónica y cuerda de 1.50 m de longitud.

## 5. PROCEDIMIENTO O METODOLOGÍA PARA EL DESARROLLO

Realice el montaje experimental que se indica en la figura 3, donde el torque neto que actúa sobre el pequeño disco al cual esta´ unida la cuerda es debido a la tensión en la cuerda.

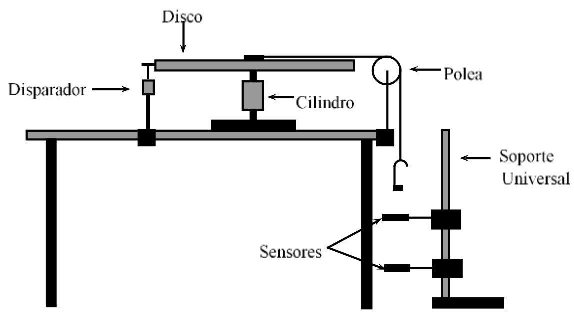


**Figura 3.** Montaje experimental

Si se realiza una sumatoria de fuerzas a lo largo de la dirección vertical para el cuerpo que desciende de masa *m*, se tiene lo siguiente:

$$+\downarrow \sum F_y = mg - T = ma \quad (10)$$

donde la magnitud de la aceleración del bloque es igual a la magnitud de la aceleración tangencial de los puntos en la periferia del pequeño disco, de tal manera que se satisface lo siguiente: $a = a_T = \alpha r$, donde $\alpha$ es la aceleración angular. Aquí, $\alpha$ tiene el mismo valor para cualquier punto del sistema en rotación. Ahora, calculemos la sumatoria de torques a lo largo del eje *z* (eje de rotación del sistema):

$$\sum \tau_z = Tr = I\alpha, \quad (11)$$

donde *I* es el momento de inercia del sistema y *r* es el radio del pequeño disco al cual esta´ unida la cuerda. A partir de las ecuaciones (10) y (11), podemos obtener una expresión para el momento de inercia del sistema en función de la aceleración del cuerpo que desciende, esto es:

$$I = \frac{mgr^2}{a} - mr^2 \quad (12)$$

Seguidamente, la aceleración del cuerpo de masa *m* se puede determinar realizando la descripción cinemática de su movimiento, tomando el sistema de referencia de la figura 4.

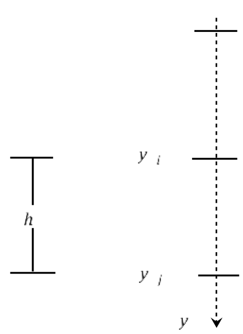

**Figura 4.** Movimiento rectilíneo descrito por el cuerpo de masa *m*.

De acuerdo al sistema de referencia de la figura 4, la ecuación cinemática de posición que describe el movimiento de *m* es:

$$y = \frac{1}{2}at^2 \quad (13)$$

la cual al ser evaluada en los instantes de tiempo $t_i$ y $t_j$ produce

$$y_i = \frac{1}{2}at_i^2 \quad (14\ a)$$

$$y_j = \frac{1}{2}at_j^2 \quad (14\ b)$$

a partir de las cuales se puede obtener una expresión para la aceleración de *m*, esto es:

$$a = \frac{2h}{t_j^2 - t_i^2} \text{ con: } h \equiv y_j - y_i. \quad (15)$$

Finalmente, al reemplazar la ecuación (15) en la ecuación (12), se puede calcular el momento de inercia del sistema como:

$$I = \left( \frac{g(t_j^2 - t_i^2)}{2h} - 1 \right) mr^2 \quad (16)$$

Luego de realizar el montaje experimental de la figura 3, coloque el contador de tiempos en el **modo 2**, ubique el portapesas con una masa adicional de 100 g a una distancia de 0.60 m respecto al suelo. Para ello, enrolle la cuerda sobre el disco pequeño que esta sobre el disco grande hasta alcanzar dicha distancia respecto al suelo. A continuación, ubique los dos sensores en dos posiciones arbitrarias sobre la trayectoria rectilínea del cuerpo (en este caso, el observador va a estar ubicado en la posición de salida del cuerpo, es decir en 0.60 m). Luego, suelte el sistema desde el reposo (para esto, suelte el disco utilizando el disparador) y registre en la tabla I el tiempo que tarda el cuerpo en pasar cada uno de los sensores. Repita el procedimiento descrito anteriormente para 9 combinaciones adicionales de los dos sensores y lleve sus resultados a la tabla I.

| $y_i$ (m) | $y_j$ (m) | $t_i$ (s) | $t_j$ (s) |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**Tabla I**

Ahora, utilizando los datos de la tabla I y la ecuación 16, calcule el momento de inercia del sistema rotante (adicionalmente, mida el diámetro del disco pequeño que esta sobre el disco grande). Lleve sus resultados a la tabla II

| $h$ (m) | $I$ (kg m$^2$) |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**Tabla II.**

Tenga presente que en el cálculo del momento de inercia del sistema $I$, $m = m_{\text{Portapesas+100}}$ g, $r = d/2$ donde $d$ es el diámetro del pequeño disco que esta´ encima del disco rotante (disco donde se enrolla la cuerda) y $g$ = 9,76 m/s$^2$.

Finalmente, con los datos de la tabla II calcule el valor promedio para el momento de inercia del sistema. Lleve su resultado a la tabla III

| $\bar{I}$ (kg m$^2$) |
|---|
| |

**Tabla III**

**Nota.** Todo el procedimiento experimental descrito anteriormente, debe ser repetido para una barra de longitud *L*.

## 6. PARÁMETROS PARA ELABORACIÓN DEL INFORME

Realizar el informe tipo articulo con el formato IEEE

- Calcule el valor del momento de inercia del disco y la barra utilizando las ecuaciones (9) y (8). Con esta información y con el valor del momento de inercia para el sistema con disco y barra, ¿Es posible dar un estimativo del momento de inercia del eje central del sistema rotante? Explique.

## 7. DISPOSICIÓN DE RESIDUOS

Este Ítem no aplica para este caso

## *8.* BIBLIOGRAFÍA


[1]Ardila, Miguel Ángel. Física Experimental, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Colección Notas de Clase, Bogotá D.C., 2007.

[2]Serway, R. A. y Jewett, J. W. Física para Ciencias e Ingeniería Tomo I, sexta edición, Thomsom, México, 2005.

[3]Alonso, M. y Finn, E. Física Vol. I Mecánica, Fondo Educativo Interamericano, S. A., E. U. A., 1970.


| | |
|---|---|
| ***Elaborado por:*** | *Javier Alberto Vargas* |
| ***Revisado por:*** | *Santiago Balvín* |
| ***Versión*:** | *2* |
| ***Fecha:*** | *Mayo 06 de 2016* |