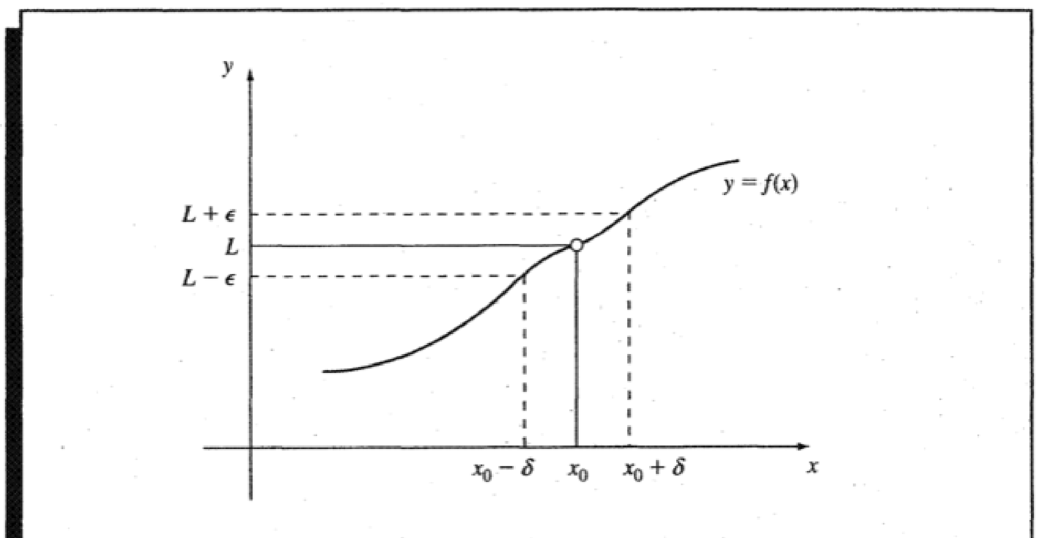
Repaso de Cálculo

Definición 1.1 Una función f definida en un conjunto X de números reales tiene el **límite** L en x_0, denotado por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

Definición 1.2 Sea f una función definida en un conjunto X de números reales y $x_0 \in X$. Entonces f es **continua** en x_0 si

$$\lim f(x) = f(x_0).$$



Repaso de Cálculo

Definición 1.3 Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión infinita de números reales o complejos. La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene el **límite** x (**converge a** x) si, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un entero positivo $N(\epsilon)$ tal que $|x_n - x| < \epsilon$, siempre que $n > N(\epsilon)$. La notación

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \text{o} \qquad x_n \to x \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty,$$

significa que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x. ■

Teorema 1.4 Si f es una función definida en un conjunto X de números reales y $x_0 \in X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

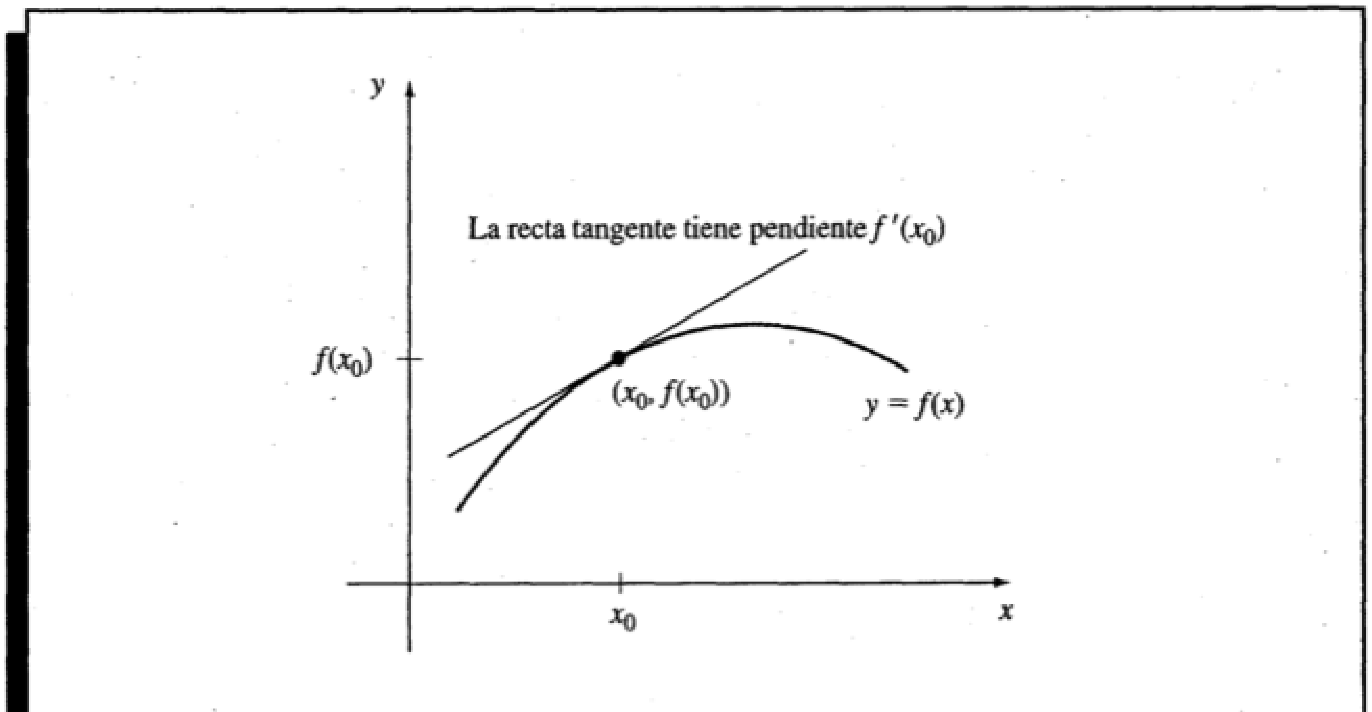
a. f es continua en x_0;

b. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión en X que converge a x_0, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. ■

Repaso de Cálculo

Definición 1.5 Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a x_0. La función f es **derivable** en x_0 si

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

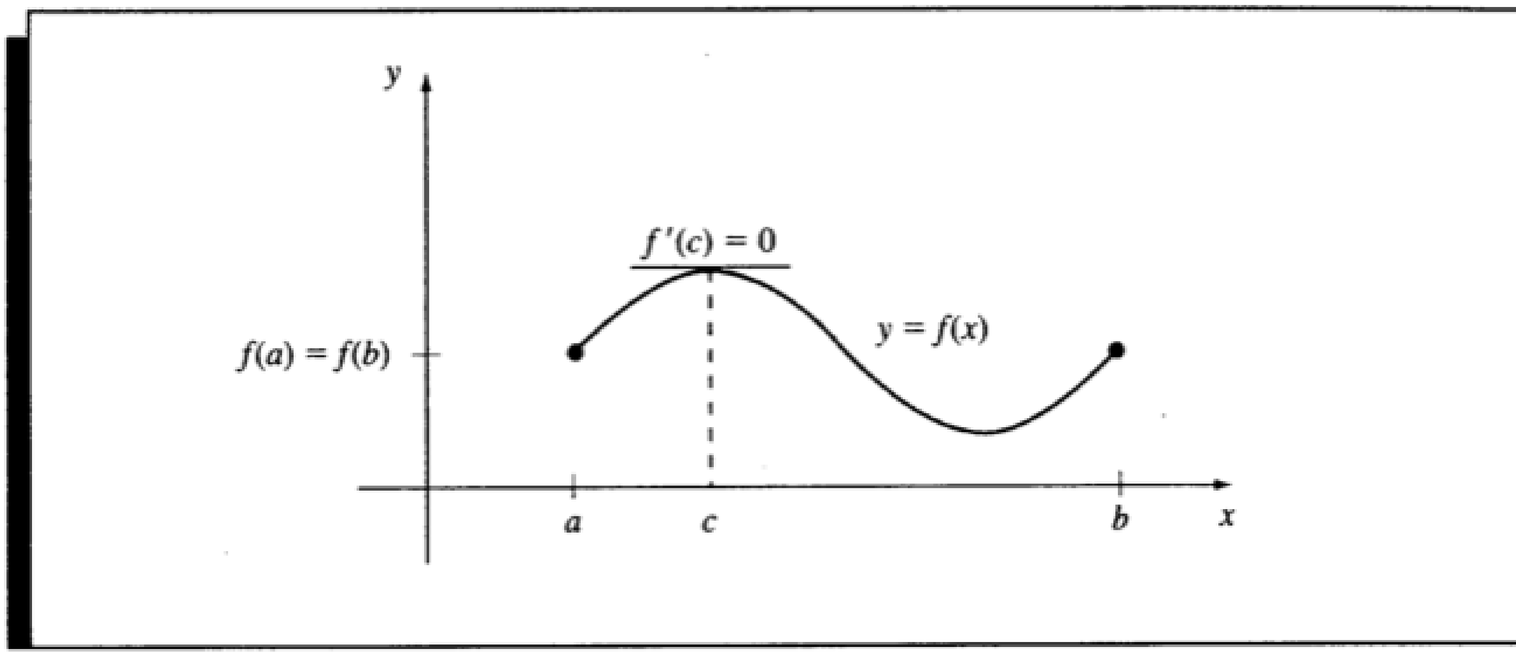


Repaso de Cálculo

Teorema 1.6 Si la función f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Teorema 1.7 (Teorema de Rolle)

Suponga que $f \in C[a,b]$ y que f es derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$. (Véase la figura 1.3.) ■



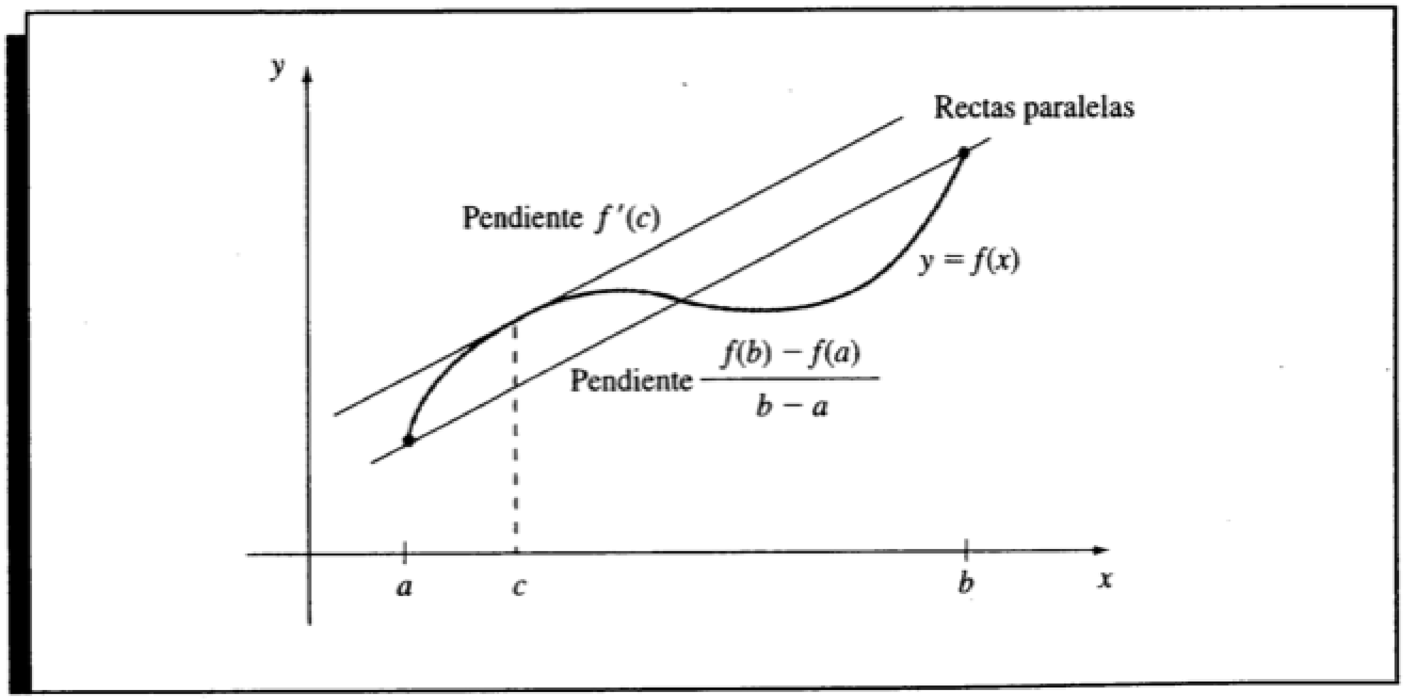
Repaso de Cálculo

Teorema 1.8 **(Teorema del valor medio)**

Si $f \in C[a, b]$ y f es derivable en (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

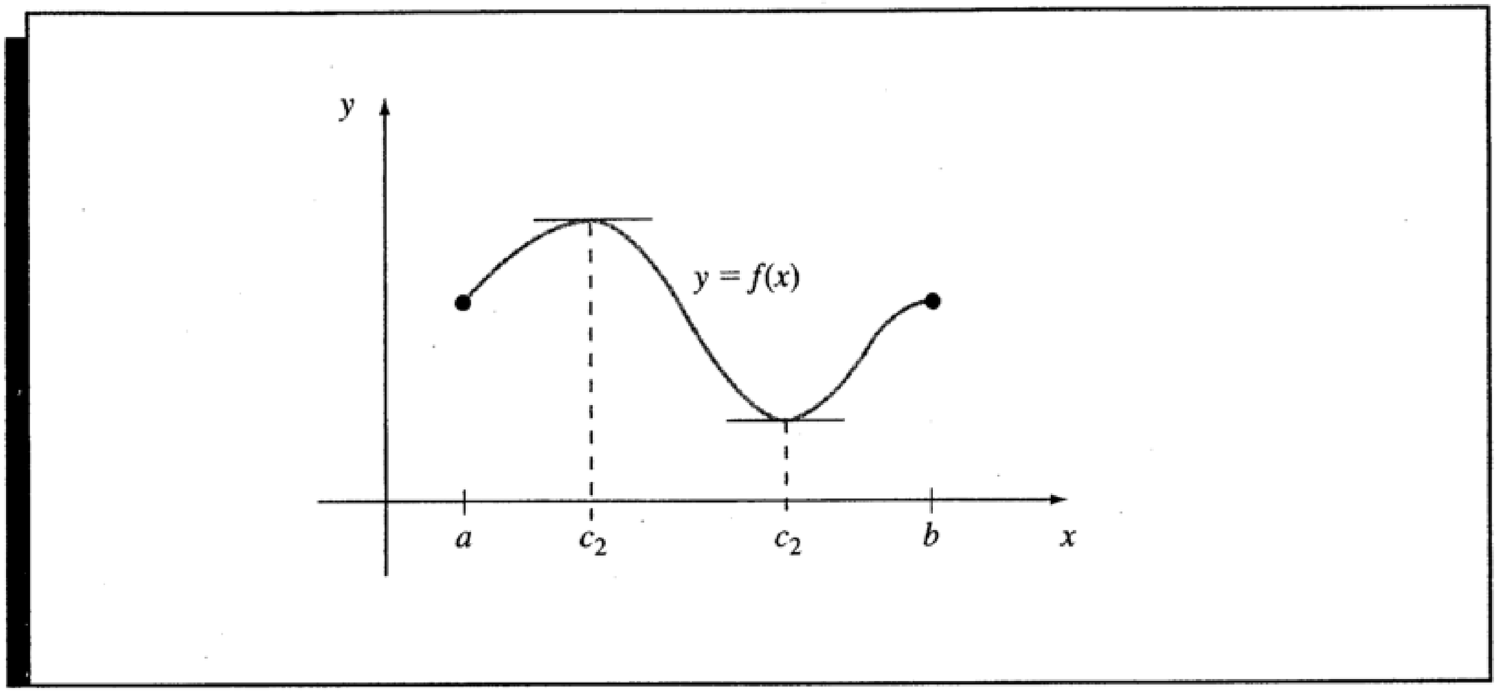
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \text{(Véase la figura 1.4.)}$$

■



Repaso de Cálculo

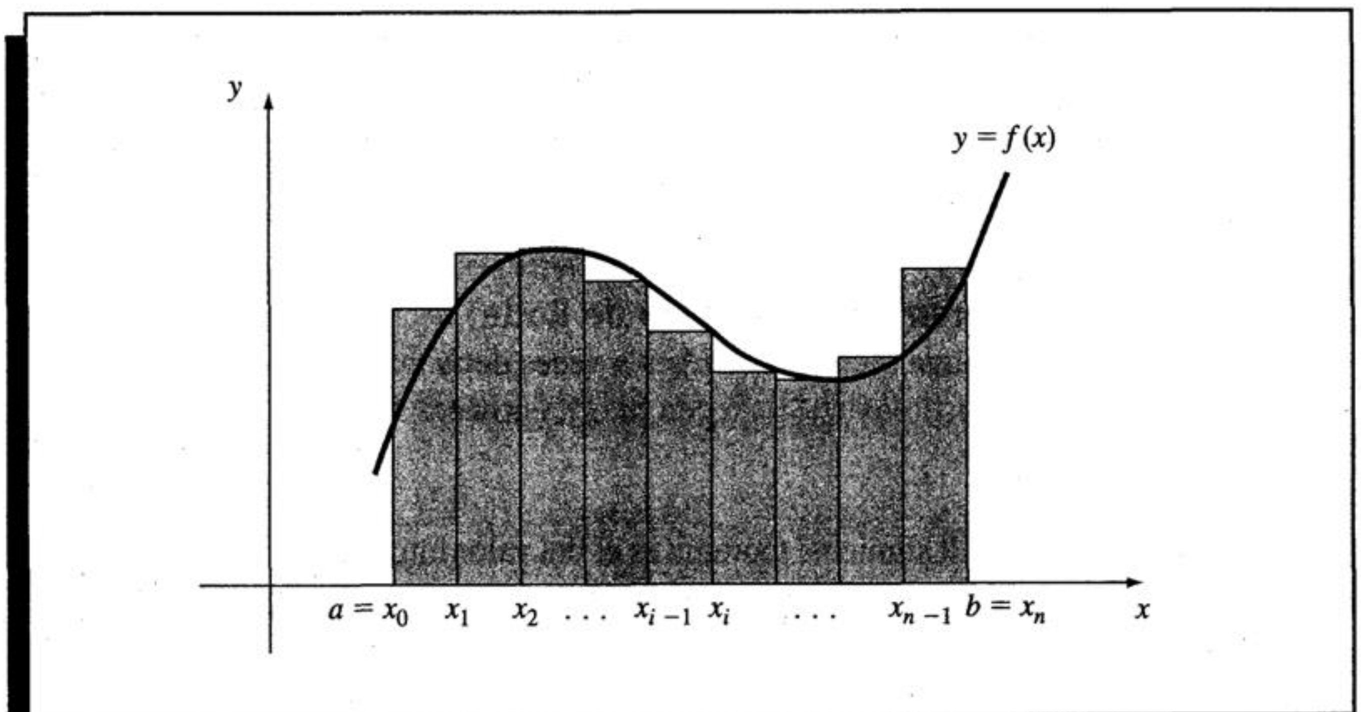
Teorema 1.9 **(Teorema de los valores extremos)**
Si $f \in C[a, b]$, entonces existen $c_1, c_2 \in [a, b]$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para toda $x \in [a, b]$. Además, si f es derivable en (a, b), entonces los números c_1 y c_2 aparecen en los extremos de $[a, b]$, o bien donde se anula f'. (Véase la figura 1.5.) ■



Repaso de Cálculo

Definición 1.10 La **integral de Riemann** de la función f en el intervalo $[a, b]$ es el siguiente límite, si éste existe:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i,$$

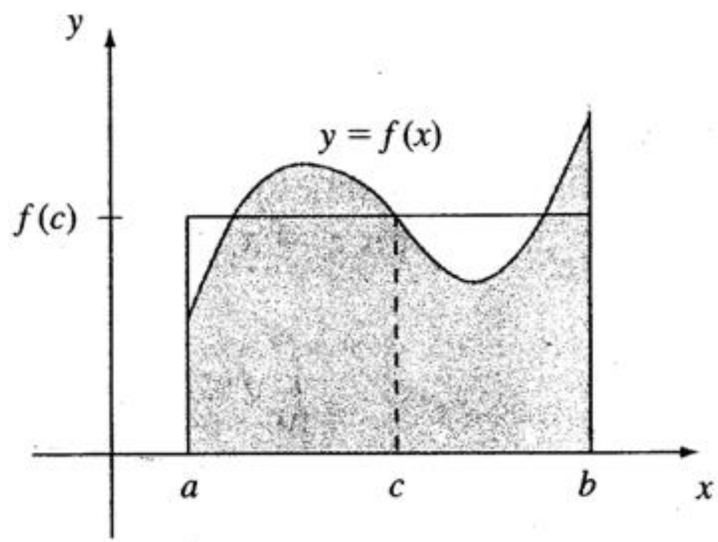


Repaso de Cálculo

Teorema 1.11 **(Teorema del valor medio ponderado para integrales)**
Suponga que $f \in C[a, b]$, que la integral de Riemann de g existe en $[a, b]$ y que $g(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

Cuando $g(x) \equiv 1$, el teorema 1.11 es el del valor medio para integrales que proporciona el **valor promedio** de la función f en el intervalo $[a, b]$ como

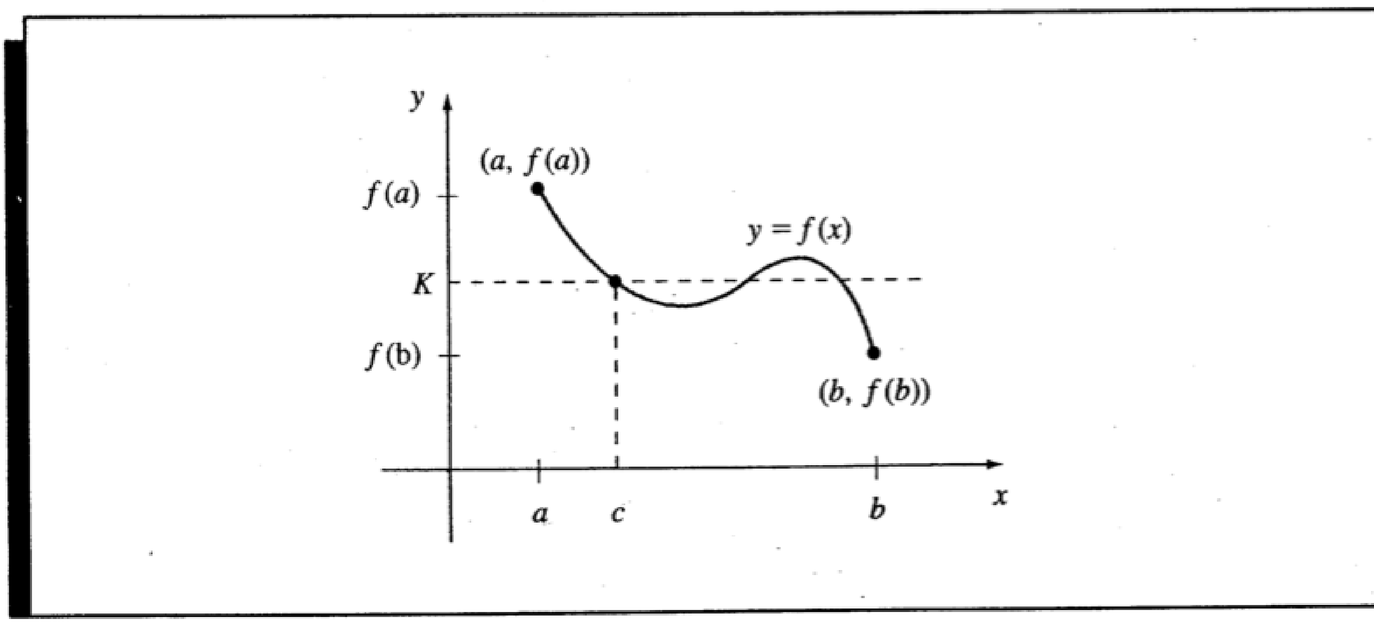


$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Repaso de Cálculo

Teorema 1.12 **(Teorema generalizado de Rolle)**
Suponga que $f \in C[a, b]$ es n veces derivable en (a, b). Si $f(x)$ se anula en los $n + 1$ números distintos $x_0, \ldots, x_n$ en $[a, b]$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $f^{(n)}(c) = 0$. ■

Teorema 1.13 **(Teorema del valor intermedio)**
Si $f \in C[a, b]$ y K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = K$. ■



Repaso de Cálculo

Teorema 1.14 **(Teorema de Taylor)**

Suponga que $f \in C^n[a, b]$, que $f^{(n+1)}$ existe en $[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi(x)$ entre x_0 y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde

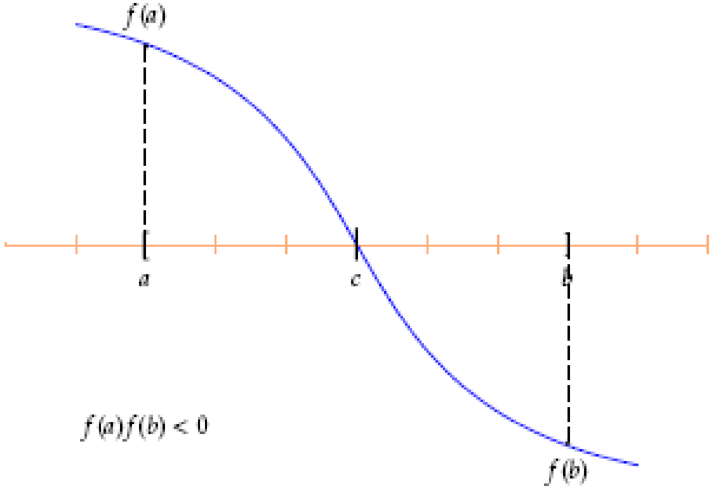
$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \qquad \blacksquare$$

MÉTODO DE BISECCIÓN

- Si f es una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ y si $f(a).f(b)<0$, entonces f debe tener un cero en (a, b). Dado que $f(a).f(b)<0$, la función cambia de signo en el intervalo $[a, b]$ y por lo tanto tiene por lo menos un cero en el intervalo.



MÉTODO DE BISECCION

El método de bisección se basa en el Teorema del Valor Intermedio

Básicamente el Teorema del Valor Intermedio nos dice que toda función continua en un intervalo cerrado, una vez que alcanzó ciertos valores en los extremos del intervalo, entonces debe alcanzar todos los valores intermedios.

En particular, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces un valor intermedio es precisamente $z = 0$, y por lo tanto, el Teorema del Valor Intermedio nos asegura que debe existir $\mathbf{x_o} \in (a,b)$ tal que $f(\mathbf{x_o})=0$, es decir, debe haber por lo menos una raíz de $f(x)$ en el intervalo (a,b).

MÉTODO DE BISECCION

El método de bisección sigue los siguientes pasos:

Sea $f(x)$ contínua,

i) Encontrar valores iniciales x_a, x_b tales que $f(x_a)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos, es decir,

$$f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$$

ii) La primera aproximación a la raíz se toma igual al punto medio entre x_a y x_b:

$$x_r = \frac{x_a + x_b}{2}$$

MÉTODO DE BISECCION

iii) Evaluar $f(x_r)$. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

- $f(x_a) \cdot f(x_r) < 0$

  En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen signos opuestos, y por lo tanto la raíz se encuentra en el intervalo $[x_a, x_r]$.

- $f(x_a) \cdot f(x_r) > 0$

  En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen el mismo signo, y de aquí que $f(x_r)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos. Por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo $[x_r, x_b]$.

- $f(x_a) \cdot f(x_r) = 0$

  En este caso se tiene que $f(x_r) = 0$ y por lo tanto ya localizamos la raíz.

El proceso se vuelve a repetir con el nuevo intervalo, hasta que:

$$|\epsilon_a| < \epsilon_s$$

es decir,

$$\left| \frac{x_{actual} - x_{previa}}{x_{actual}} \times 100\% \right| < \epsilon_s$$

MÉTODO DE BISECCION

Ejemplo 1

Aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln x$ hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Analizando la función (Usar el programa) vemos que un intervalo útil es (1 , 1.5).

En efecto, tenemos que

$$f(1) = e^{-1} - \ln 1 = e^{-1} > 0$$

mientras que

$$f(1.5) = e^{-1.5} - \ln(1.5) = -0.18233 < 0$$

Cabe mencionar que la función $f(x)$ sí es contínua en el intervalo $[1,1.5]$. Así pues, tenemos todos los requisitos satisfechos para poder aplicar el método de bisección. Comenzamos:

MÉTODO DE BISECCION

i) Calculamos el punto medio (que es de hecho nuestra primera aproximación a la raíz):

$$x_{r_1} = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$$

ii) Evaluamos $f(1.25) = e^{-1.25} - \ln(1.25) = 0.0636 > 0$

iii) Para identificar mejor en que nuevo intervalo se encuentra la raíz, hacemos la siguiente tabla:

$f(1)$	$f(1.25)$	$f(1.5)$
$+$	$+$	$-$

Por lo tanto, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1.25, 1.5]$.

En este punto, vemos que todavía no podemos calcular ningún error aproximado, puesto que solamente tenemos la primera aproximación. Así, repetimos el proceso con el nuevo intervalo $[1.25, 1.5]$.

MÉTODO DE BISECCION

Calculamos el punto medio (que es nuestra segunda aproximación a la raíz):

$$x_{r_2} = \frac{1.25 + 1.5}{2} = 1.375$$

Aquí podemos calcular el primer error aproximado, puesto que contamos ya con la aproximación actual y la aproximación previa:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_{r_2} - x_{r_1}}{x_{r_2}} \times 100\% \right| = 9.09\%$$

Puesto que no se ha logrado el objetivo, continuamos con el proceso.

MÉTODO DE BISECCION

Evaluamos $f(1.375) = e^{-1375} - \ln(1.375) = -0.06561 < 0$, y hacemos la tabla:

$f(1.25)$	$f(1.375)$	$f(1.5)$
$+$	$-$	$-$

Así, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1.25, 1.375]$.

Calculamos el punto medio,

$$x_{r_1} = \frac{1.25 + 1.375}{2} = 1.3125$$

Y calculamos el nuevo error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_{r_3} - x_{r_2}}{x_{r_3}} \times 100\% \right| = 4.76\%$$

El proceso debe seguirse hasta cumplir el objetivo.

MÉTODO DE BISECCION

Resumimos los resultados que se obtienen en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
1.25	
1.375	9.09%
1.3125	4.76%
1.28125	2.43%
1.296875	1.20%
1.3046875	0.59%

Así, obtenemos como aproximación a la raíz $x_{r_6} = 1.3046875$

MÉTODO DE BISECCION

- **Ejemplo.**

  La función $f(x) = x\text{sen}(x) - 1$ tiene un cero en el intervalo [0,2], porque $f(0) = -1$ y $f(2)=0.818595$

BEGIN

Input a_1, b_1

Repeat

  $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

  If $f(c)\,f(a) > 0$

    $b \leftarrow c$

  Else

    $a \leftarrow c$

  End If

Until

  $\frac{|b-a|}{2} < \varepsilon$ or $f(c) = 0$

END

MÉTODO DE BISECCION

- **Teorema.** (*Error en el método de bisección*).

  Si f es continua en [*a*, *b*] *y f*(*a*) *f*(*b*) < 0, *el método de bisección genera una sucesión que aproxima un cero c de f con la propiedad que:*

$$|c - c_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

MÉTODO DE BISECCION

n	Extremo izquierdo a_n	Extremo derecho b_n	Punto medio c_n	Valor de la función $f(c_n)$	Error Relativo $\left\lvert \frac{c_n - c_{n-1}}{c_n} \right\rvert$
1	0	2	1	-0.158529	
2	1	2	1.5	0.496242	0.333333
3	1	1.5	1.25	0.186231	0.2
4	1	1.25	1.125	0.015051	0.111111
5	1	1.125	1.0625	-0.071827	0.0588235
6	1.0625	1.125	1.09375	-0.028362	0.0285714
7	1.09375	1.125	1.109375	-0.006643	0.0140845
8	1.1093750	1.125	1.1171875	0.004208	0.0069930
9	1.1093750	1.1171875	1.11328125	-0.001216	0.0035087

MÉTODO DE PUNTO FIJO

- Sólo requieren un valor inicial o un par.
- Pueden no encerrar la raíz.
- Pueden ser divergentes conforme se realizan iteraciones.
- Si un método abierto converge a la solución, usualmente lo hace con mayor rapidez que los métodos cerrados

MÉTODO DE PUNTO FIJO

- Básicamente, consiste en reordenar los términos de la función.
- Se iguala a cero, para que la variable “x” quede a la izquierda.
- $x = g(x) \quad ; \quad x_{i+1} = g(x_i)$
- Existen dos técnicas:
- <u>1- Despejando la variable x</u>
- <u>2- Sumando x a ambos lados de la ecuación (cos(x), sen(x), etc)</u>

MÉTODO DE PUNTO FIJO

Pasos a seguir:

1. Transformar la ecuación **$f(x) = 0$** en una ecuación equivalente de punto fijo: **x** = **$g(x)$**.

2. Tomar una estimación inicial **x_0** del punto fijo **x_*** de **g** [x_* punto fijo de g si $g(x_*) = x_*$].

3. Para **k=1, 2, 3, …** hasta que converja, iterar **$x_{n+1} = g(x_n)$**.

MÉTODO DE PUNTO FIJO

<u>Teorema del punto fijo</u>: Sea $g:[a,b] \to [a,b]$ continua, entonces:

a) g posee al menos un punto fijo.

b) Si además $|g'(x)| \leq k<1$, $\forall x \in [a,b]$, entonces el punto fijo es único y si tomamos $x_0 \in [a,b]$, la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ converge al punto fijo de $g(x)$.

Convergencia del Método del Punto Fijo

Aplicar el método del punto fijo a:

⇩ $g(x) = \cos x$, x_0

⇩ $g(x) = 2/x^2$, $x_0=1$

⇩ $g(x) = \mathrm{sqrt}(2/x)$, $x_0=1$

y analizar los resultados.

<u>Sugerencia</u>: Usar la orden

ITERATES (g(x), x, x_0, n)

de DERIVE y comparar los dos últimos con 2^(1/3).

Tomando x_0 cercano al punto fijo x_*

- si $|g'(x_*)| < 1$ los iterados convergen linealmente a x_*.
- si $|g'(x_*)| > 1$ los iterados no convergen a x_*.
- si $g'(x_*) = 0$ los iterados convergen cuadráticamente a x_*.

Algoritmo de Punto Fijo

- **Datos**
  - Estimación inicial: $\mathbf{x_0}$
  - Precisión deseada: **tol**
  - Tope de iteraciones: **maxiter**
- **Proceso: mientras no converja repetir**
  - Nueva estimación: $\mathbf{x = g(x_0)}$
  - Incremento: $\mathbf{incr = |x - x_0|}$
  - Actualización: $\mathbf{x_0 = x}$
- Resultado
  - Estimación final: $\mathbf{x}$

MÉTODO DE PUNTO FIJO

- Ejemplo 1

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100$$

Iteración	**x**	**$\lvert\varepsilon_a\rvert$ %**
0	0	-
1	1.5	100
2	2.625	42.86
3	4.945	46.92
4	13.728	63.98
5	95.730	85.66

$$\varepsilon_a = \left| \frac{1.5 - 0}{1.5} \right| \times 100 = 100\%$$

MÉTODO DE PUNTO FIJO

- **Ejemplo 2**

$$f(x) = sen\left(\sqrt{x}\right) - x$$

$$sen\left(\sqrt{x}\right) - x = 0$$

$$\Rightarrow x = sen\left(\sqrt{x}\right)$$

Iteración	**X**	$\lvert \varepsilon_a \rvert$ **%**
0	0.5	
1	0.649636939	23.0339333
2	0.721523797	9.96319987
3	0.750901166	3.91228175
4	0.762096851	1.46906324
5	0.766248143	0.54176864
6	0.767771654	0.19843287
7	0.76832866	0.07249574
8	0.768532022	0.02646108
9	0.768606231	0.00965506

MÉTODO DE PUNTO FIJO

Función: → Por iteración de punto fijo con xi = 0

$$f(x) = \cos(x)$$

$$\cos(x) = 0$$

$$x = \cos(x) + x$$

$$x_{i+1} = \cos(x_i) + x_i$$

$$x_{0+1} = \cos(x_0) + x_0 = \cos(0) + 0 = 1 + 0 = 1$$

Iteración	x_i	$\lvert\varepsilon_a\rvert$ %	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ %
0	0	-	100
1	1	100.0	36.34
2	1.54030	35.08	1.941
3	1.57079	1.941	0.000301
4	$(\frac{1}{2})\cdot\pi$	0.0003	0

MÉTODO DE NEWTON

- Ecuación de la tangente

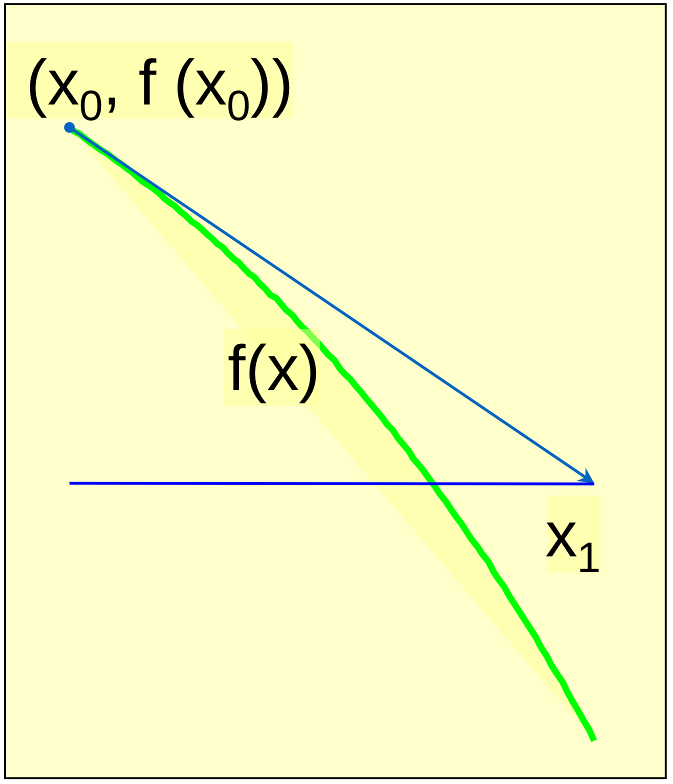
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Intersección con OX

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$

- Paso genérico

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$



Convergencia del método de Newton

1. Newton como iteración de punto fijo

$$\boxed{g(x) = x - f(x)/f'(x)}$$

1. Derivada de la función de iteración

$$\boxed{g'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2}}$$

1. Convergencia cuadrática

$$\boxed{g'(x_*) = 0 \qquad \text{si} \qquad f'(x_*) \neq 0}$$

Ventaja: <u>converge cuadráticamente</u> **si**

- la estimación inicial es buena
- no se anula la derivada

Inconveniente: <u>usa la derivada</u>

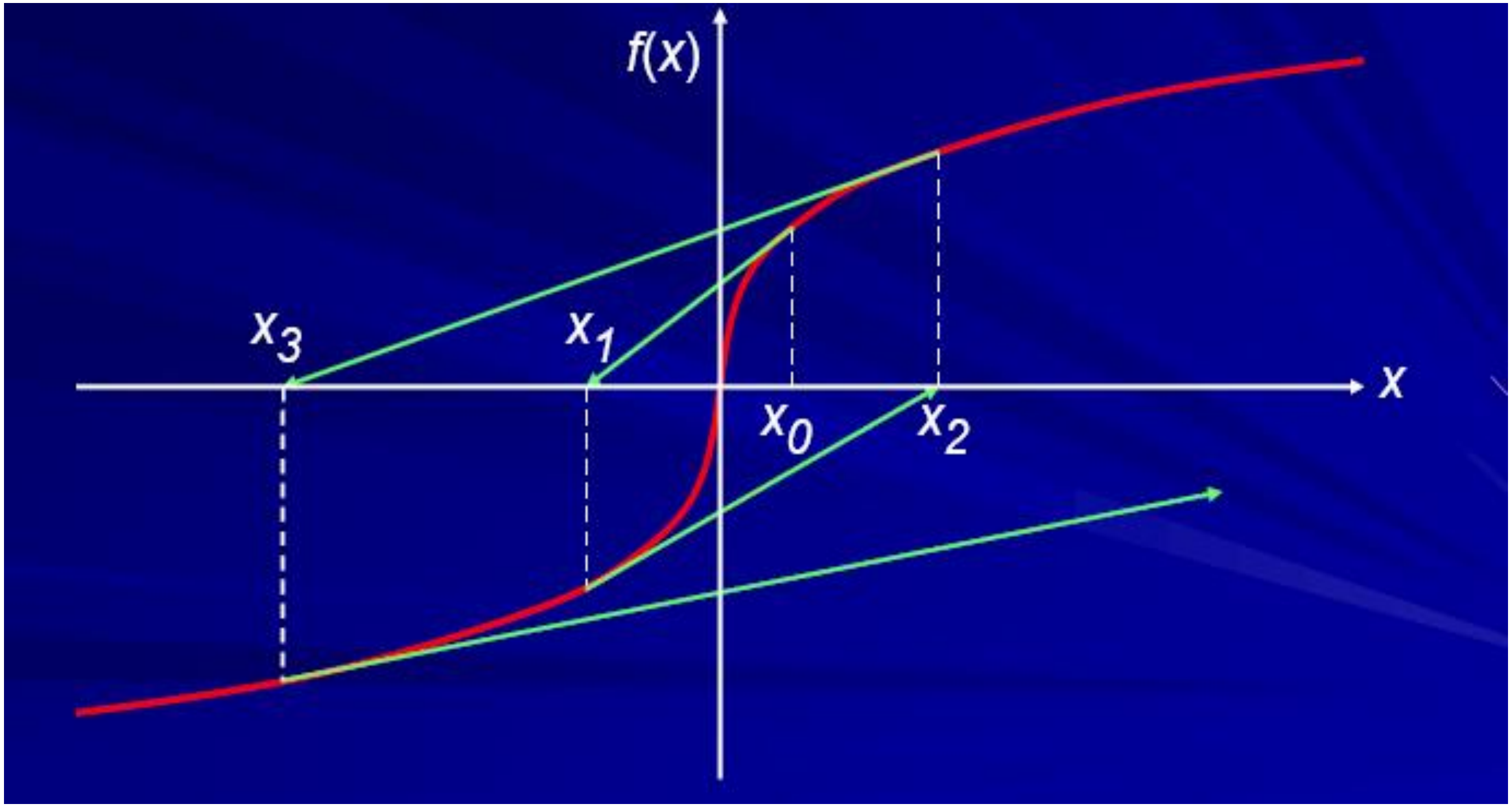
- coste de la evaluación
- disponibilidad

Algoritmo de Newton

- **Datos**
  1. Estimación inicial: **x**
  2. Precisión deseada: **tol**
  3. Tope de iteraciones: **maxiter**
- **Proceso: mientras no converja repetir**
  1. Incremento: **incr = - f(x)/f'(x)**
  2. Nueva estimación: **x = x + incr**
- **Resultado**
  1. Estimación final: **x**

MÉTODO DE NEWTON

- Si el valor inicial de la raíz es Xi, se puede extender una tangente desde [Xi, f(Xi)].



Ejemplo 1

Calcular la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$,Con Xo = 0.

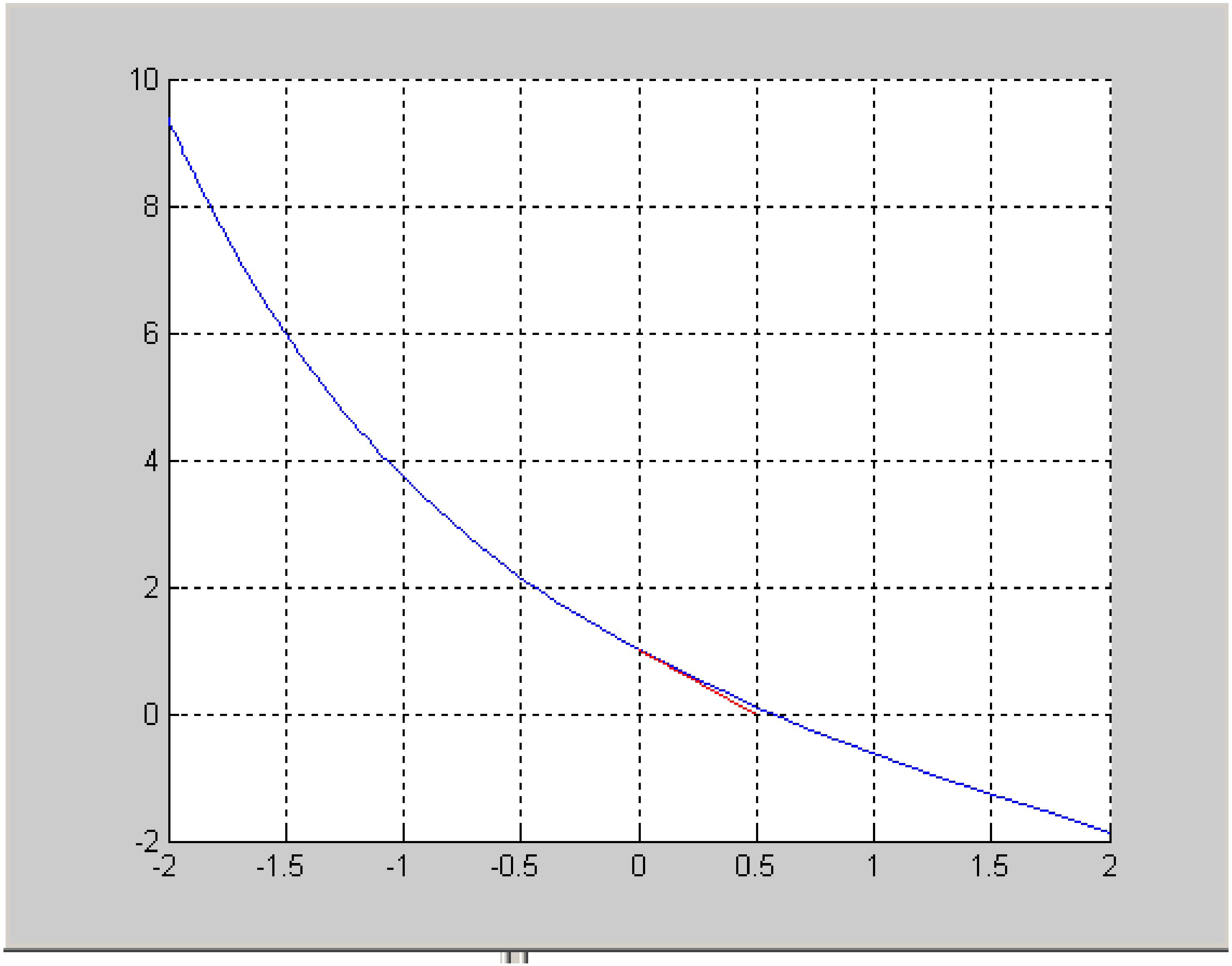
Primera derivada

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

Sustituyendo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

I	Xi	Et(%)
0	0	100
1	0.500000000	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	0.0000220
4	0.567143290	$<1X10^{-8}$



10
8
6
4
2
0
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

Ejemplo 2

- Calcular la Raíz positiva de

$$f(x) = x^{10} - 1$$

Con Xo= 0.5

Función por evaluar :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{10} - 1}{10x_i^{9}}$$

Iteración	X
0	0.5
1	51.65
2	46.485
3	41.8365
4	37.65285
5	33.887565
.	.
.	.
.	.
∞	1.000000

Ejemplo 3

$$f(x) = e^{-x} - \ln x$$

Comenzando con $x_0 = 1$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{-e^{-x_i} - \frac{1}{x_i}} = x_i + \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{e^{-x_i} + \frac{1}{x_i}}$$

Comenzamos con $x_0 = 1$ y obtenemos:

$$x_1 = x_0 + \frac{e^{-x_0} - \ln(x_0)}{e^{-x_0} + \frac{1}{x_0}} = 1.268941421$$

En este caso, el error aproximado es:

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{1.268941421 - 1}{1.268941421} \times 100\%\right| = 21.19\%$$

Continuamos el proceso hasta reducir el error aproximado hasta donde se pidió.

Aprox. a la raíz	Error aprox.
1	
1.268941421	21.19%
1.309108403	3.06%
1.309799389	0.052%

Ejemplo 4

$$f(x) = \arctan x + x - 1$$

Comenzando con $x_0 = 0$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\arctan(x_i) + x_i - 1}{\frac{1}{1+x^2} + 1}$$

Comenzamos con $x_0 = 0$ y obtenemos:

$$x_1 = x_0 - \frac{\arctan(x_0) + x_0 - 1}{\frac{1}{1+x_0^2} + 1} = 0.5$$

En este caso, el error aproximado es:

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{0.5-0}{0.5}\times 100\%\right| = 100\%$$

Continuamos el proceso hasta reducir el error aproximado hasta donde se pidió.

Aprox. a la raíz	Error aprox.
0	
0.5	100%
0.5201957728	3.88%
0.5202689918	0.01%

Ejemplo 5

$$f(x) = x^2 - R$$

Comenzando con $x_0 = 5$ y $R = 26$ hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left[x_i + \frac{R}{x_i}\right]$$

Comenzamos con $x_0 = 5$ y obtenemos:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
5	
5.1	1.96%
5.099019608	0.019%
5.099019514	0.0000018%

MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

Algoritmo de Newton-Raphson.

==

Para encontrar una solución de $f(x) = 0$ dada una aproximación inicial p_0:

Entrada: aproximación inicial p_0; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0;

Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 1$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar $p = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$ *(calcular p_i)*;

Paso 4: si $|p - p_0| < TOL$ entonces SALIDA (p);
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar $p_0 = p$. *(redefinir p_0)*;

Paso 7: SALIDA (*'El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 =$ '*, N_0);
(procedimiento completado sin éxito); PARAR.

==